



# Interaction de la lumière avec les milieux hétérogènes tridimensionnels

Brian Stout

## ► To cite this version:

Brian Stout. Interaction de la lumière avec les milieux hétérogènes tridimensionnels. Optique / photonique. Aix-Marseille Université, 2006. tel-01233112

**HAL Id: tel-01233112**

**<https://hal.science/tel-01233112>**

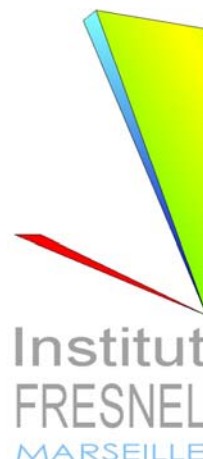
Submitted on 24 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Université de Provence**



**Habilitation à Diriger les Recherches**

**Interaction de la lumière avec les milieux hétérogènes tridimensionnels**

Présentée par

**Brian STOUT**

Institut Fresnel : Equipe **C.L.A.R.T.E.**

**29 septembre 2006**

Composition du jury :

Jean-Jacques GREFFET (Président)  
Jacques LAFAIT (Rapporteur)  
Gérard GRANET (Rapporteur)  
Evgeny POPOV (Rapporteur)  
Jean-Marc LAYET  
Gérard TAYEB



# Habilitation à diriger des recherches

## Interaction de la lumière avec les milieux hétérogènes tridimensionnelles

Brian Stout

29 septembre 2006

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Curriculum vitae</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Bref résumé de carrière</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Contrats et collaborations</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Encadrement de jeunes chercheurs</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Communications à des congrès et séminaires</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Techniques de base et notation</b>	<b>9</b>
8.1	Le problème . . . . .	9
8.1.1	Rappel sur les champs «microscopiques» et «macroscopiques» . . . . .	9
8.1.2	Milieux hétérogènes . . . . .	10
8.2	Ondes multipolaires . . . . .	12
8.3	Harmoniques sphériques vectorielles . . . . .	14
8.4	Développements du champ dans des milieux homogènes . . . . .	15
8.5	Matrice- $T$ . . . . .	16
8.6	Développements du champ dans des milieux hétérogènes . . . . .	17
8.7	Matrice- $T$ d'une sphère isotrope (Théorie de Mie) . . . . .	18
8.8	Diffusion multiple par la technique de la fonction de Green . . . . .	21
8.8.1	La forme opérateur de la fonction de Green . . . . .	21
8.8.2	Fonction de Green dans un milieu homogène . . . . .	22
8.8.3	Le potentiel d'un diffuseur discret . . . . .	23
8.8.4	La forme opérateur de la matrice- $T$ . . . . .	24
8.8.5	La matrice- $T$ à diffusion multiple . . . . .	25
8.9	Représentation multipolaire de la diffusion multiple . . . . .	26
8.9.1	Equations de Foldy-Lax de la diffusion multiple . . . . .	28
8.9.2	Solution de la diffusion multiple par inversion directe . . . . .	28
8.9.3	Troncature de la base des ondes partielles . . . . .	29
8.10	Forces optiques directes et induites . . . . .	30
8.10.1	Forces optiques et débat Minkowski - Abrahams . . . . .	30
8.10.2	Formulation harmonique du tenseur de Maxwell . . . . .	33
8.10.3	Sections efficaces pour la force de radiation . . . . .	34

<b>9</b>	<b>Quelques résultats des travaux récents</b>	<b>35</b>
9.1	Solutions récursives de la matrice $T$ à diffusion multiple . . . . .	36
9.2	Solutions itératives de la matrice- $T$ à diffusion multiple . . . . .	37
9.3	Matrices de diffusion et sections efficaces . . . . .	39
9.4	Forces optiques . . . . .	41
9.5	Matrices- $T$ des objets sans symétrie sphérique . . . . .	43
<b>10</b>	<b>Orientation future des travaux</b>	<b>44</b>
<b>11</b>	<b>Résumés d'études</b>	<b>45</b>
11.1	Interactions effectives . . . . .	45
11.2	Opérateurs effectifs . . . . .	45
11.3	Calcul du paramètre de densité des niveaux des noyaux chauds . . . . .	45
11.4	Capture d'électrons et décroissance dans les étoiles présupernovae . . . . .	45
11.5	Décroissance double bêta : . . . . .	46
11.6	Brisure spontanée de symétrie . . . . .	46
11.7	Propagation des ondes et dispersion spatiale dans un milieu hétérogène . . . . .	46
11.8	Approximation en champ moyen pour la construction de matrices- $T$ complètes de sphères de taille finie et de diffuseurs flous . . . . .	46
11.9	Matrice- $T$ électromagnétique et propriétés dynamiques effectives d'un milieu aléatoire . .	47
11.10	Facteurs de phase des ondes incidentes et sortantes dans la diffusion par des agrégats . .	47
11.11	Modélisation de fibres optiques structurées avec un modèle unidimensionnel . . . . .	47
11.12	Calculs des champs locaux par des techniques de matrices de transition . . . . .	47
11.13	Relations d'auto-consistance des matrices de transition et calculs de champs de diffusion	48
11.14	Absorption dans des systèmes de diffusion multiple et cohérente . . . . .	48
11.15	Calcul des forces optiques dans des faisceaux arbitraires en utilisant le théorème de translation-addition . . . . .	48
11.16	Théorie différentielle de la diffusion de la lumière par un objet tri-dimensionnel . . . . .	48
11.17	Théorie différentielle de la diffraction par des objets anisotropes de forme sphérique . . .	49
11.18	Théorie différentielle de la diffraction par des objets anisotropes de forme arbitraire . . .	49
11.19	Méthode de la matrice $T$ appliquée aux cristaux photoniques tridimensionnels . . . . .	49
<b>12</b>	<b>Publications dans des journaux avec comité de lecture</b>	<b>50</b>
<b>13</b>	<b>Appendices</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Théorème de translation pour ondes partielles vectorielles</b>	<b>53</b>

## 1 Remerciements

Ce mémoire a été l'occasion de me pencher sur mon parcours passé et de réaliser que j'ai beaucoup de personnes à remercier :

- Aux U.S.A. à l'Université de Stony Brook (State University of New York) où j'ai préparé mon doctorat dans l'équipe de physique nucléaire de P<sup>r</sup> Gerry Brown que je remercie tout particulièrement ainsi que mon directeur de thèse, le P<sup>r</sup> T.T.S. Kuo qui m'a appris à bien comprendre «les petites bêtes» dans un programme de recherche.
- En France je remercie beaucoup les chercheurs
  - Yves-Patrick Pellegrini et Jean-Jacques Niez au C.E.A.
  - Jacques Lafait (Université de Paris VI - CNRS)
  - Michel Nevière, Evgeny Popov, Gerard Tayeb - Professeurs à l'Université d'Aix-Marseille (I / III)

ainsi que :

- Sophie Stout (mon épouse)
- et les anciens étudiants de thèse
- Jean-Claude Auger et Olivier Moine

Pour leur soutien constant je remercie mes parents Don et Beverly Stout et mon frère Tim et sa famille.

Un autre grand merci ma belle-famille Michel et You Fournier ainsi que Jean et les siens.

*Pour notre fils Jacques et à la mémoire de Sophie*

## 2 Curriculum vitae

**D. Brian Stout**

Résidence Les Prairies ; Bâtiment C20  
153 Chemin de Château Gombert  
13013 Marseille

Nationalité française

Date de naissance 01/09/1962

E-mail : [brian.stout@fresnel.fr](mailto:brian.stout@fresnel.fr)

Page web : [http ://www.fresnel.fr/perso/stout/index.htm](http://www.fresnel.fr/perso/stout/index.htm)

### Expérience Professionnelle

**Nov. 2000 – présent** Maître de conférences, Université de Provence, Equipe CLARTE, Institut Fresnel, UMR CNRS 6133, Case 161, Faculté des Sciences et Techniques de St. Jérôme, Marseille

**Oct.99 – sept.00** A.T.E.R. Université de Provence, Laboratoire d'Optique électromagnétique, Marseille

**Juin 98 – sept. 99** Stage post-doctoral au Laboratoire d'Optique des Solides, Université Paris VI, UMR CNRS 7601

**Janv. 97 – juin 98** Visiteur au C.E.N.B.G. de l'Université de Bordeaux Gradignan

**Mai 94 – jan. 97** Stage post doctoral dans l'équipe de Jean-Jacques Niez : Etudes des Propriétés Electromagnétique des Matériaux ( Furtivité ) Centre d'Etudes Scientifiques et Techniques d'Aquitaine, C.E.A./C.E.S.T.A, Le Barp, Gironde

**Janv. 92 - dec. 93** Stage post doctoral à l'Institut de Physique Nucléaire, Université de Paris Sud, ORSAY

**Dec. 1991** «Ph.D.» (thèse de doctorat ) en physique théorique, «State University of New York at Stony Brook» , U.S.A. Titre de la thèse : **Neutrino Mass and Nuclear Double Beta Decay**

**Sept. 86 - Dec. 91** Assistant, Groupe de physique nucléaire théorique, State University of New York at Stony Brook, Stony Brook, New York, U.S.A.

**Été 88-90** Assistant en physique théorique, Laboratoire National de Los Alamos, Nouveau Mexique, U.S.A.

### 3 Introduction

Je décrirai dans ce mémoire une sélection des activités d'encadrement et de recherche que j'ai menées au sein du groupe C.L.A.R.T.E. de l'Institut Fresnel depuis octobre 1999 et au sein du groupe Optique des Solides (de l'Institut de nano-science à Paris) de 1998-1999. J'espère qu'il va servir de base pour de nouveaux travaux dans les prochaines années. Mes articles publiés ou acceptés en 2005-2006 (Références [1]-[8]) sont joints à la fin de ce document. Mes articles antérieurs sont disponibles sur le site :

<http://www.fresnel.fr/perso/stout/index.htm>

Je passerai essentiellement sous silence mes travaux antérieurs en milieux effectifs effectués pour la plupart au CEA/CESTA. Je passerai aussi sous silence mes travaux liés au problème à  $N$ -Corps et la physique des neutrinos. Bien que ces études antérieures aient eu une influence et continuent d'en avoir une sur mes travaux actuels, les inclure dans ce mémoire mènerait à un document trop hétéroclite. Je me suis donc concentré sur mes travaux les plus récents qui permettent de comprendre les travaux que je compte mener et diriger dans les prochaines années. On trouve néanmoins dans la section 11 de courts résumés de tous mes travaux, où j'essaie d'étayer les grandes lignes des objectifs et les résultats obtenus.

Le fil conducteur de mes recherches récentes est l'interaction de la lumière avec des systèmes mésoscopiques complexes ou composites en trois dimensions. Par «mésoscopiques», on veut dire que le système comporte des objets de taille comparable aux phénomènes ou ondes concernées mais suffisamment grandes afin qu'on puisse discuter leur comportement sans être obligé de considérer les atomes individuels.

De tels milieux suivent deux classifications principales : les systèmes ordonnés et les systèmes désordonnés. Les deux classifications se trouvent naturellement dans la nature et ont des applications technologiques.

Les structures ordonnées permettent une manipulation de la lumière pour la technologie. L'importance des applications des réseaux à la spectroscopie et ailleurs ne nécessite plus de rappel. Les structures du type cristaux photoniques offrent de nouvelles possibilités pour le contrôle et le guidage de la lumière.

En ce qui concerne les milieux désordonnés, une des applications de telles études est l'optimisation des propriétés volontairement diffusantes et/ou absorbantes comme les peintures ou les revêtements furtifs. Une autre application en est les études de télédétection et le problème inverse où la diffusion peut nous renseigner sur les caractéristiques d'un milieu étudié ou empêcher la détection d'un objet enfoui.

La grande majorité de mes travaux scientifiques a utilisé des techniques analytiques afin d'améliorer les performances de la modélisation par ordinateur de phénomènes complexes. Ce manuscrit va refléter ce thème en expliquant les grandes lignes des certains calculs que j'ai effectués ces dernières années. Les diverses applications seront traitées de façon relativement succincte, mais on peut trouver des discussions d'applications dans certains de mes articles ci-joints.

### 4 Bref résumé de carrière

J'ai commencé ma carrière en tant que physicien nucléaire. Je me suis tout d'abord intéressé au calcul des états d'excitation des noyaux<sup>[27, 31]</sup> et des amplitudes de transition<sup>[29]</sup> dans les noyaux atomiques, en utilisant la méthodologie du problème à  $N$ -corps. J'ai ensuite appliqué les méthodes de calcul que j'ai développées à plusieurs types de problèmes différents. Notamment, j'ai étudié dans ma thèse certaines transitions «exotiques» des noyaux afin d'explorer les propriétés des neutrinos.<sup>[26]</sup> En dehors de ma thèse, j'ai étudié le comportement de noyaux chauffés lors des collisions dans les accélérateurs<sup>[28]</sup>, et les interactions nucléaires dans les étoiles en fin de vie avant le stade de supernovae.<sup>[30]</sup> J'ai également étudié l'utilité du développement en  $1/N$  pour le calcul de potentiels effectifs des noyaux.<sup>[25]</sup>

J'ai commencé mes travaux en électromagnétisme lors d'un emploi doctoral au CEA/CESTA, en appliquant les méthodes du problème à  $N$ -corps à la propagation d'ondes en milieux micro-hétérogènes.<sup>[23, 24]</sup> Nous avons étudié la détermination du milieu effectif et le transport radioactif dans de tels milieux. Nous avons souligné le besoin dans une théorie de milieu aléatoire d'une matrice- $T$  du type «hors couche de masse». Vu la complexité d'une telle matrice- $T$  exacte, nous avons proposé un modèle de matrice- $T$  plus simple qui nous a permis d'étendre les calculs de milieux effectifs au-delà du domaine quasi-statique. En dehors de nos publications, nos résultats principaux ont été exposés dans une thèse.<sup>a)</sup> (liste d'encadrements : page 6)

Mes travaux au CEA/CESTA m'ont incité à diversifier mes intérêts dans différents problèmes de diffusion et d'absorption au sein du Laboratoire d'Optique des Solides de Paris VI. Lors de l'encadrement



d'un étudiant en thèse,<sup>b)</sup> page 6) j'ai développé de nouvelles méthodes pour une résolution quasi-analytique et récursive du problème de diffusion multiple d'un nombre fini de diffuseurs.<sup>[13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22]</sup> Ces études ont permis l'étude de la diffusion dépendante qui a tendance à diminuer l'efficacité de systèmes volontairement diffusants comme les peintures, les cosmétiques, le papier et les revêtements pour la furtivité. Cette technique de calcul fut utilisée dans plusieurs contrats et collaborations industrielles menées sur la diffusion, l'absorption et la non-linéarité induite dans des systèmes diffusants divers.

Je suis arrivé à l'Université de Provence en tant qu'ATER en novembre 1999, et j'ai poursuivi mes recherches au sein du groupe C.L.A.R.T.E. de l'Institut Fresnel, UMR CNRS 6133. J'ai été ensuite nommé Maître de Conférence à l'Université de Provence en novembre 2000.

Une de mes premières activités a été une collaboration avec le Pr. Nevière avec qui nous avons développé un modèle unidimensionnel de cristaux photoniques.<sup>[20]</sup> Nous avons appliqué cette méthode au problème de fibres optiques structurées avec guidage dans un cœur d'air enrobé d'un cristal photonique. Le but était de mettre en évidence la possibilité de guidage de faisceaux laser haute puissance. Notre méthode numérique rapide et stable nous a permis de calculer les caractéristiques des modes de propagation dans de telles fibres. Nous avons mis en évidence le comportement «mono-mode» de ces fibres et l'importance du choix des propriétés du cœur afin d'éviter les «fuites» de lumière induites par diffraction. Actuellement, je m'intéresse à nouveau aux cristaux photoniques mais cette fois à des modèles tridimensionnels.

Par la suite, j'ai dirigé une thèse et un DEA sur le calcul quasi-analytique des forces optiques sur des objets micrométriques en faisant appel à la matrice  $T$  des objets.<sup>[5, 8] c), d) page 6)</sup> L'utilisation des forces optiques sur de petits objets trouve actuellement des applications dans la manipulation de petits objets en biologie et chimie, et dans une variété de techniques de mesure. Parmi les nombreuses applications en perspective, on trouve les lasers à micro-cavité et les cristaux photoniques.

J'ai continué les études sur la diffusion multiple.<sup>[2, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]</sup> au sein de l'Institut Fresnel en travaillant à une meilleure compréhension du transport radiatif<sup>[10, 11, 12, 14]</sup> et à la modélisation d'agrégats aléatoires de plus en plus grands.<sup>[2, 6]</sup> Concernant la diffusion par des agrégats de grande taille, avec Pierre Sabouroux et Jean-Michel Geffrin de l'Institut Fresnel nous avons entamé une étude en collaboration avec le CETHIL (Centre d'Etudes Thermiques de Lyon). Nous avons commencé à comparer les résultats de notre modélisation avec des mesures, en amplitude et en phase dans le domaine des micro-ondes. L'accord observé entre théorie et expérience a été jusqu'ici d'une grande qualité.<sup>[2]</sup> Cette étude concerne des agrégats du type suie qui actuellement posent des problèmes dans les environs des aérogares. Nos études trouvent également une utilité dans la modélisation des poussières interstellaires.<sup>[2]</sup>

Dans la plupart des études sur les agrégats de diffuseurs, que j'ai menées d'abord à l'Université de Paris VI et ensuite à l'Institut Fresnel, nous prenions pour diffuseurs individuels des sphères homogènes et isotropes. Cette idéalisation nous a permis de traiter rapidement les propriétés des diffuseurs individuels en utilisant la théorie de Mie et de nous concentrer sur le problème de diffusion multiple. Compte tenu des progrès réalisés dans le domaine de la diffusion multiple, nous avons récemment commencé à étudier des hétérogénéités ayant une forme et/ou une structure plus complexe.

Une première étude concernait des diffuseurs volontairement plus complexes comme les sphères enrobées du type de celles actuellement fabriquées à l'Institut Fresnel.<sup>[10, 11]</sup> Dans le cadre d'un contrat industriel, nous avons étudié les moyens d'augmenter l'absorption dans des matériaux composites composés de sphères enrobées. Cette étude nous a permis d'avancer sur l'utilisation de la diffusion afin d'augmenter l'absorption dans les matériaux. Elle a également permis le développement de nouvelles techniques dans le calcul des effets de diffusion dépendante.

Afin d'élargir encore le type de diffuseurs individuels, j'ai développé une théorie différentielle de la diffraction par des objets tridimensionnels décrits en coordonnées sphériques.<sup>[7]</sup> Elle fournit la matrice- $T$  d'un objet de forme quelconque. Cette méthode a intégré et généralisé les progrès récents réalisés par les Pr. Nevière et Popov dans la théorie différentielle de réseaux de diffraction. Dernièrement, nous avons étendu cette théorie à des sphères composées de matériaux anisotropes,<sup>[5]</sup> et ensuite à des objets anisotropes de forme quelconque.<sup>[4]</sup> Les applications de ces théories sont en cours.<sup>[1]</sup>

La théorie que nous avons développée pour traiter la sphère anisotrope fournit une solution quasi-analytique. Il est à remarquer qu'alors que la théorie de Mie fournissant la solution du problème de la diffraction par une sphère isotrope date de 1908, aucune solution n'avait depuis été élaborée pour une sphère anisotrope arbitraire. Bien que certains travaux résolvait quelques cas particuliers d'anisotropie, un article publié en 2004 signalait encore que le cas d'anisotropie générale échapperait à toute résolution analytique, pour la raison qu'une anisotropie générale brise la symétrie sphérique. Nos travaux ont infirmé cette prédiction. Ils trouvent des applications immédiates dans le domaine de l'astrophysique, la diffusion

par les poussières interstellaires anisotropes conditionnant l'évolution des étoiles.

## 5 Contrats et collaborations

**06-** Collaboration ANR avec le CETHIL (Centre Thermique de Lyon), Pierre Sabouroux, et Jean-Michel Geffrin sur la diffusion par des agrégats du type suie.

**05-06** Collaboration avec un projet NASA visant la réalisation de futurs télescopes spatiaux de grandes dimensions.

**02-03** Contrat industriel avec le «Centro d'Investigacion en Polimeros» COMEX, Mexique. visant l'amélioration de peintures.

**01-02** Contrat industriel visant l'amélioration des panneaux solaires, IMRA-Europe.

**98-99** Contrat industriel (Rhodia-Rhône-Poulenc) visant l'amélioration de peintures.

**98-99** Etude en micro-ondes pour un consultant sur des particules sphériques ayant des couches sphériques (Université de Paris VI).

**94-97** Etude de furtivité radar pour le C.E.A.

## 6 Encadrement de jeunes chercheurs

### Responsable principal d'une thèse et d'un stage de D.E.A

**d) 2002-2005 Modélisation de forces optiques** : Thèse, Olivier Moine, Aix-Marseille (Soutenance : Novembre 2005)

**c) 2001-2002 Modélisation de Pincettes Optiques pour la nanotechnologie** : stage de DEA, Olivier Moine , Aix-Marseille

### Participation à l'encadrement de 2 thèses

**b) 98-99 Etude expérimentale et modélisation optique des milieux hétérogènes diffusants** : Thèse de Jean-Claude Auger ; Université de Paris VI (Soutenance : Décembre 1999)

**a) 94-97 Propriétés électromagnétiques dynamiques effectives des milieux aléatoires** : Thèse de P. Thibaudeau ; C.E.A., Université de Bordeaux (Soutenance : Juin 1997)

## 7 Communications à des congrès et séminaires

**Mars 2006** Communication PIERS Cambridge, USA

**Mars 2006** Communication : GDR Couleurs : Paris France

**Mai 2005** Communication : Elect. Light Scat. Non-Sph. Part. Grenada Espagne

**Mars 2004** Communication : PIERS Pise Italie

**Déc. 2003** Communication : GDR Ondes : ORSAY France

**Sept. 2003** Communication : Horizons d'Optique : Toulouse France

- Avril 2003** Séminaire invité : Centro d'Investigacion en Polímeros COMEX, México
- Nov. 2002** Communication : GDR Ondes : ORSAY France
- Juillet 2002** 2 communications : Congrès ETOPIIM Salt Lake City, Utah
- March 2002** Communication : Elect. Light Scat. Non-Sph. Part. Gainseville Floride
- Août 2001** 3 communications : Electromagnetic Optics 2, Paris, France
- Août 2001** Communication : Int. Mat. Research Congress , Cancun, Mexique
- Août 2000** 2 communications : Elect. Light Scat. Non-Sph. Part. Halifax Canada
- Août 1999** Communication, Ecole d'été, Cargèse, Corse, France
- Juillet 1999** Présentation invité ETOPIIM 99, Hong-Kong
- Juin 1996** Séminaire invité C.E.A./Bruyères le Chatel, Paris, France
- Juin 1995** Séminaire invité CENBG, Bordeaux, France
- Juin 1995** Communication, Journées Maxwell 95, June 6-9, Bordeaux-Lac, France
- Mars 1995** Séminaire invité CENBG, Bordeaux, France
- Avril 1993** Séminaire invité GANIL Caen, France
- Mai 1992** Séminaire invité ORSAY, France
- Avril 1991** Communication donnée à la Conférence Nuclear Physics in the 90's, Santa Fe, Nouveau Mexique, Etats-Unis
- 1989** Communication donnée à la réunion de l'«American Physical Society», Baltimore Maryland, Etats-Unis
- 1988** Communication donnée à la réunion de l'«American Physical Society», Washington D.C., Etats-Unis.

## 8 Techniques de base et notation

Ce chapitre, donne une introduction / rappel des techniques, concepts et notations utilisés afin de comprendre les diverses applications de la technique «matrice- $T$ » pour la diffusion par des systèmes tridimensionnels.

### 8.1 Le problème

On commence en écrivant les équations de Maxwell pour un milieu homogène.

#### 8.1.1 Rappel sur les champs «microscopiques» et «macroscopiques»

Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1d)$$

où  $c \equiv 299\,792\,458$  m/s est la célérité de la lumière, et la perméabilité du vide,  $\mu_0$ , est définie par :

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{henry/m} \quad (2)$$

La permittivité du vide,  $\epsilon_0$ , est donné par :

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2 \mu_0} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad (3)$$

Les équations de Maxwell décrivent l'évolution des champs, mais seraient stériles sans l'équation de la force de Lorentz qui décrit l'interaction du champ électromagnétique avec la matière. L'équation dit que la force sur une charge  $q$  qui se déplace avec la vitesse  $\mathbf{v}$  est :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (4)$$

Dans l'ensemble de nos modélisations, nous considérons que la matière est entièrement décrite par une densité de polarisation dipolaire électrique,  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ , et une densité de polarisation magnétique,  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ . Des considérations microscopiques habituelles nous amènent à définir des charges de polarisation,  $\rho_{\text{pol}}$  :

$$\rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

ainsi que des courants de polarisation :

$$\mathbf{J}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

et des courants de magnétisation :

$$\mathbf{J}_{\text{mag}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \quad (7)$$

En insérant explicitement ces définitions de charge et courant matériel dans les équations (1b) et (1c) on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) + \rho_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_{\text{mag}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

où  $\rho_{\text{src}}$  et  $\mathbf{J}_{\text{src}}$  sont les courants sources en dehors du système matériel étudié. Insérant les équations (5) (6) (7) dans cette équation on obtient :

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)) = \rho_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

$$\nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)) + \mathbf{J}_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) \quad (10)$$

On définit ensuite les champs «macroscopiques»,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &\equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &\equiv \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

En termes du champs  $\mathbf{D}$  l'équation (9) s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) \quad (12)$$

qui peut remplacer l'équation (1b) quand un milieu matériel est présent. L'équation (10) s'écrit également en termes des champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$ . Si on prend la conservation de charge comme principe de base, l'équation (10) et l'équation (1a) forment les deux équations «macroscopiques» de l'électromagnétisme :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (13a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{src}}(\mathbf{r}, t) \quad (13b)$$

Les équations «macroscopiques» (13) ne sont utiles que si l'on connaît les relations entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  et les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Pour la plupart des matériaux,  $\mathbf{D}$  ne dépend que de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ne dépend que de  $\mathbf{B}$ . Dans ce mémoire, on va considérer que le milieu *externe* au système est linéaire, homogène, isotrope, et spatialement local. Dans un tel milieu, on peut relier les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  via les «relations» constitutives temporellement non-locales  $R_\epsilon(t - t')$  et  $R_\mu(t - t')$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' R_\epsilon(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \int_{-\infty}^t dt' R_\mu(t - t') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \end{aligned} \quad (14)$$

Typiquement, on adresse le problème de non-localité temporelle en travaillant dans le domaine harmonique avec une dépendance en  $\exp(-i\omega t)$  des champs, afin que les relations entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  ainsi que celles entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  puissent être écrites de manières «locales» dans le domaine harmonique :

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \mathbf{H}(\omega) \quad (15)$$

où la permittivité électrique relative  $\epsilon_r(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $R_\epsilon(t - t')$  et la perméabilité magnétique relative  $\mu_r(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $R_\mu(t - t')$ .

On remarque que la présence de l'absorption dans le milieu impose que  $\epsilon_r(\omega)$  et/ou  $\mu_r(\omega)$  soient des nombres complexes avec des parties imaginaires positives. Néanmoins, dans certaines situations, le milieu sera presque transparent et on préfère faire l'approximation de  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  réels et indépendants de la fréquence.

Dans un milieu homogène, il est souvent pratique de combiner les équations (13a) et (13b) dans le domaine harmonique afin d'obtenir une seule équation de deuxième ordre entièrement en termes du champ électrique :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_r \mu_r \mathbf{E} = i\omega \mu_r \mu_0 \mathbf{J}_{\text{src}} \quad (16)$$

### 8.1.2 Milieux hétérogènes

On considère maintenant une structure inhomogène immergée dans le milieu homogène. Donc  $\epsilon_r$  (et potentiellement  $\mu_r$ ) sont des fonctions de coordonnées spatiales. Dans ce mémoire, on va considérer

seulement des matériaux ayant des propriétés constitutives constantes par morceau, même s'il est possible de généraliser ces techniques aux matériaux ayant des dépendances spatiales plus complexes. Par contre, suite à mes travaux récents, on peut maintenant aborder des situations où le matériau composant l'objet n'est plus décrit par une constante diélectrique isotrope, mais est un matériau intrinsèquement anisotrope, comme c'est le cas pour de nombreux cristaux dans la nature.

Le problème qu'on veut traiter est de prédire la distribution du champ électromagnétique en présence d'un courant source ou d'un champ incident quelconque. On peut être amené à interroger le champ électromagnétique soit loin du système, soit près du système, voir même à l'intérieur du système étudié. Le fait qu'on étudie des systèmes tri-dimensionnels et que le champ électromagnétique soit de nature vectorielle a tendance à rendre ce problème assez difficile à traiter et à visualiser. Notre solution à cette difficulté consiste à décrire le champ à travers sa projection sur une base d'ondes «multipolaires» (décrite en section 8.2). De cette manière, les descriptions du champ électromagnétique reviennent à spécifier les coefficients de sa projection sur cette base.

On remarque qu'on veut surtout étudier les systèmes où les composants sont comparables en taille à la longueur d'onde caractéristique du rayonnement incident sur le système. Nous appelons de tels systèmes des systèmes résonants parce qu'il est courant dans de tels systèmes d'exciter des résonances électromagnétique liées aux formes géométriques des inhomogénéités. Si les composants sont très grands devant la longueur d'onde, on considère qu'on peut utiliser l'optique géométrique. Si les composants sont petits par rapport à la longueur d'onde, on invoque des approximations du style quasi-électrostatique ou dipolaire. Ces deux limites sont moins définies que l'on pourrait croire mais nous considérons pour la plupart qu'elles sont relativement bien maîtrisées et nous n'allons pas en parler souvent dans ce mémoire.

Les types de système que nous avons regardés le plus souvent sont des systèmes comme ceux de la figure 1 où les inhomogénéités ordonnées ou désordonnées sont immergées directement dans le milieu extérieur homogène. Un deuxième type de système plus réaliste qu'on peut traiter actuellement est celui des systèmes inhomogènes immergés dans une région homogène sphérique comme celle sur la figure 2.

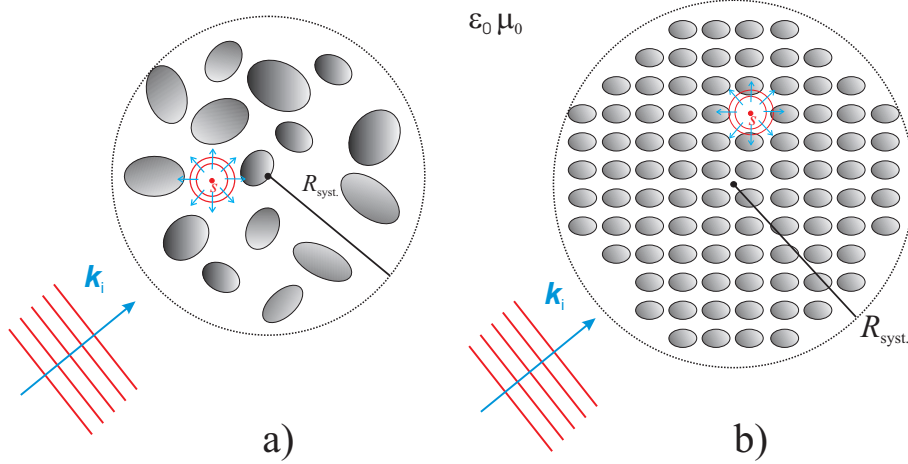


FIG. 1 – Système inhomogène immergé directement dans le milieu externe. Les inhomogénéités sont contenues dans une sphère de rayon  $R_{\text{syst}}$  et le champ incident vient soit de sources à l'extérieur du système, soit à l'intérieur du système.

Parfois, on est amené à étudier des modes ou des quasi modes de propagation dans des systèmes hétérogènes, surtout quand la structure est étendue et/ou périodique. Nous avons parfois adapté les techniques de diffusion discutées dans ce mémoire au problème de propagation des modes en cherchant des solutions en l'absence d'onde incidente.

Bien que les géométries des figures 1 et 2 aient des applications intéressantes, la géométrie d'une couche inhomogène qui s'étale à l'infini comme celle des figures 3a) et 3b) nous intéresse plus particulièrement. A l'heure actuelle, on ne peut traiter de tels systèmes qu'en faisant des approximations, comme la théorie de transfert radiatif. Un des intérêts majeurs des géométries des régions sphériques est que les solutions semi-analytiques obtenues pour les géométries sphériques peuvent nous permettre d'améliorer les traitements des systèmes de géométrie en couches.

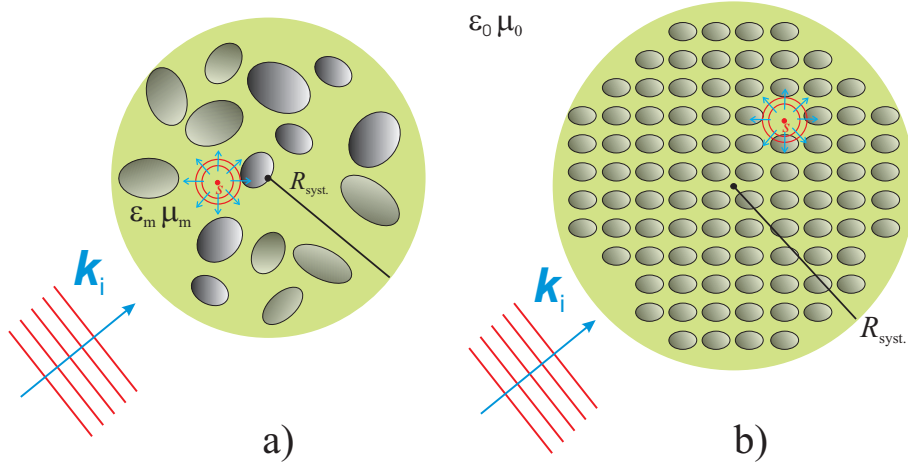


FIG. 2 – Système inhomogène immergé dans un milieu sphérique de géométrie sphérique de rayon  $R_{\text{syst}}$  et ayant des paramètres constitutifs  $\varepsilon_m \neq \varepsilon_0$  et  $\mu_m \neq \mu_0$ .

Dans tous ces types de systèmes, l'équation de base qui gouverne le champ électrique est :

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r(\mathbf{r})} (\nabla \times \mathbf{E}) - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{src}} \quad (17)$$

où  $\varepsilon_r(\mathbf{r})$  et  $\mu_r(\mathbf{r})$  peuvent être des fonctions de position.

## 8.2 Ondes multipolaires

Quand le milieu extérieur est isotrope et homogène, l'invariance par rotation dans ce milieu permet de définir une base des solutions aux équations de Maxwell dans ce milieu ayant des propriétés sous rotation particulièrement intéressantes. On appelle les fonctions de cette base les «ondes multipolaires» ou les «ondes partielles» («partial waves»). L'étude des propriétés de ces ondes multipolaires est très riche et fait intervenir la théorie spectrale, la théorie des groupes et pourrait facilement être le sujet d'un livre à elle seule. Dans cette section, on se contentera d'introduire les ondes multipolaires.

Puisque le milieu extérieur est homogène, isotrope et local en régime harmonique, les paramètres constitutifs relatifs du milieu «partial waves»,  $\varepsilon_e$  et  $\mu_e$  ne sont pas des tenseurs et on peut les décrire en domaine harmonique par des constantes complexes. L'indice «e» signifie désormais le milieu *externe*. Les équations de Maxwell harmoniques sans sources donnent dans ce cas que le champ électrique satisfait l'équation :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \varepsilon_e \mu_e \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (18)$$

où nous avons défini  $k_0 \equiv \omega/c$ .

Il est habituel de construire les solutions de l'équation (18) à partir d'ondes multipolaires scalaires. Désignons par  $\varphi$  une solution de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\Delta\varphi + k_e^2 \varphi = 0 \quad (19)$$

où  $k_e^2 \equiv k_0^2 \varepsilon_e \mu_e$ . On peut écrire les solutions ondes sortantes de cette équation,  $\varphi_{nm}(k_e \mathbf{r})$  par :

$$\varphi_{nm}(k\mathbf{r}) \equiv h_n^+(kr) Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (20)$$

où  $h_n^+(\rho)$  sont les fonctions de Bessel sphériques sortantes définies par  $h_n^+(\rho) \equiv j_n(\rho) + iy_n(\rho)$ , et  $Y_{nm}(\theta, \phi)$  sont les harmoniques sphériques scalaires normalisés (on donne leurs définitions en 8.3 ci-dessous). Les  $\varphi_{nm}(k\mathbf{r})$  ont la particularité qu'elles divergent à l'origine. Elles sont caractérisées par leurs indices  $n$  et  $m$  qui sont des nombres entiers tel que :

$$n = 0, 1, \dots, \infty \quad \text{et} \quad m = -n, \dots, n \quad (21)$$



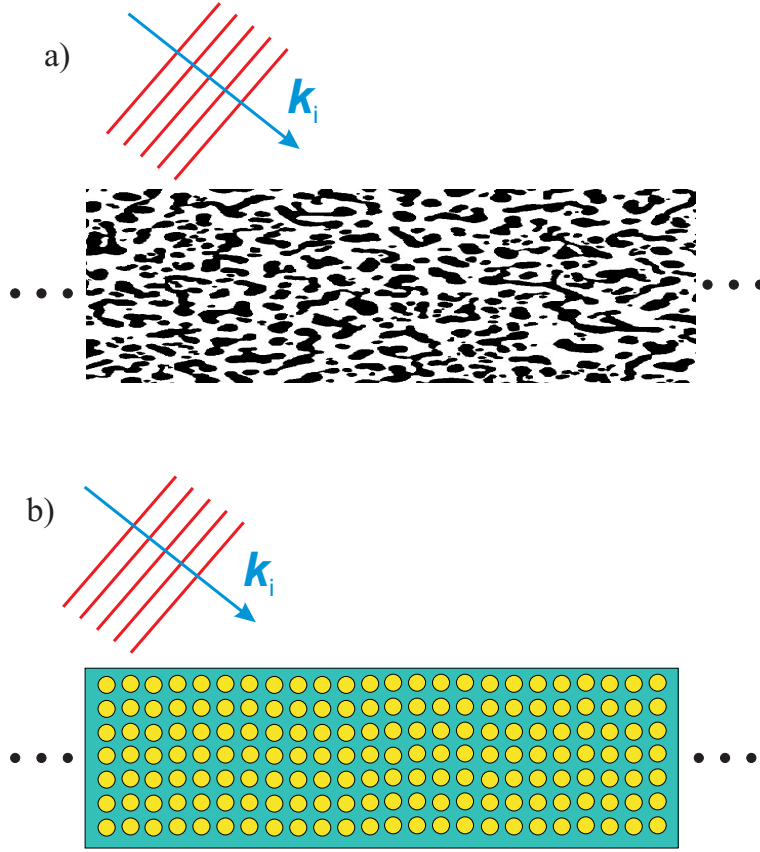


FIG. 3 – a) Système inhomogène dans une couche avec une géométrie aléatoire. b) Système inhomogène dans une couche avec une géométrie ordonnée.

L'indice  $n$  correspond au nombre quantique azimutal (habituellement dénoté  $l$  en mécanique quantique) et  $m$  à la projection du moment cinétique.

On peut également définir des solutions «régulières» de l'équation (18), dénoté  $Rg\{\varphi_{nm}(k\mathbf{r})\}$ , qui ne divergent pour aucune valeur de  $|\mathbf{r}|$  fini :

$$Rg\{\varphi_{nm}(k\mathbf{r})\} = j_n(kr)Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (22)$$

où les  $j_n(x)$  sont les fonction de Bessel sphériques. Les fonctions d'ondes régulières,  $Rg\{\varphi_{nm}(k\mathbf{r})\}$ , sont orthogonales dans le sens que :

$$\int d\mathbf{r} Rg\{\varphi_{n,m}(k\mathbf{r})\} Rg\{\varphi_{\nu\mu}(k'\mathbf{r})\} = \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k') \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \quad (23)$$

Revenons maintenant à l'équation vectorielle des ondes électromagnétiques de l'équation(18), On peut maintenant construire une solution en coordonnées sphériques de l'équation (18) et qui satisfait la condition d'onde sortante[7]. Elles s'écrivent  $\mathbf{M}_{nm}(k_e\mathbf{r})$  où :

$$\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r}) \equiv \frac{\nabla \times [\mathbf{r}\varphi_{nm}(k\mathbf{r})]}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (24)$$

Un deuxième type de solution de l'équation (18) satisfaisant la condition d'onde sortante  $\mathbf{N}_{nm}(k_e\mathbf{r})$  est obtenu à partir de l'équation :

$$\mathbf{N}_{nm}(k\mathbf{r}) \equiv \frac{\nabla \times [\mathbf{M}_{nm}(k\mathbf{r})]}{k} \quad (25)$$

Ces deux types d'ondes ont des singularités essentielles à l'origine. On remarque que la notation  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  est conventionnelle dans la littérature.



On peut également définir des ondes vectorielles régulières qui n'ont pas de singularités pour  $|\mathbf{r}|$  fini.

$$\begin{aligned} Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} &= \frac{\nabla \times [\mathbf{r} Rg \{ \varphi_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \}]}{\sqrt{n(n+1)}} \\ Rg \{ \mathbf{N}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} &\equiv \frac{\nabla \times [Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \}]}{k} \end{aligned} \quad (26)$$

Le facteur  $1/\sqrt{n(n+1)}$  dans les définitions de  $\mathbf{M}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r})$  et  $\mathbf{N}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r})$  est choisi afin que  $Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \}$  et  $Rg \{ \mathbf{N}_{nm}(\mathbf{k}\mathbf{r}) \}$  aient des relations d'orthogonalité analogues à celles des ondes scalaires :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r} Rg \{ \mathbf{M}_{nm}^*(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} \cdot Rg \{ \mathbf{M}_{\nu\mu}(k'\mathbf{r}) \} &= \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k') \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \\ \int d\mathbf{r} Rg \{ \mathbf{N}_{nm}^*(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} \cdot Rg \{ \mathbf{N}_{\nu\mu}(k'\mathbf{r}) \} &= \frac{\pi}{2k^2} \delta(k - k') \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \\ \int d\mathbf{r} Rg \{ \mathbf{M}_{nm}^*(\mathbf{k}\mathbf{r}) \} \cdot Rg \{ \mathbf{N}_{\nu\mu}(k'\mathbf{r}) \} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole delta de Kronecker, et  $\delta(k - k')$  la fonction  $\delta$  de Dirac.

Il est à remarquer que les fonctions  $\psi$ ,  $Rg \{ \psi_{nm} \}$ ,  $\mathbf{M}_{\nu\mu}$ ,  $\mathbf{N}_{\nu\mu}$ ,  $Rg \{ \mathbf{M}_{nm} \}$ , et  $Rg \{ \mathbf{N}_{nm} \}$  sont ici toutes définies en coordonnées sphériques. Donc, elles dépendent du choix de l'origine du système. Ce point est important dans le développement des théories de diffraction utilisant ces fonctions.

### 8.3 Harmoniques sphériques vectorielles

Les fonctions harmoniques sphériques scalaires,  $Y_{nm}(\theta, \phi)$ , sont exprimées en termes de fonctions de Legendre associées  $P_n^m(\cos \theta)$  définies par [32] :

$$\begin{aligned} Y_{nm}(\theta, \phi) &= \left[ \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \\ &\equiv \bar{P}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \end{aligned} \quad (28)$$

où dans la deuxième ligne nous avons introduit les fonctions de Legendre normalisées,  $\bar{P}_n^m$  :

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \bar{P}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (29)$$

Ces fonctions harmoniques sphériques sont normalisées par rapport à une intégration sur l'angle solide :

$$\int_0^{4\pi} d\Omega Y_{\nu\mu}^*(\theta, \phi) \cdot Y_{nm}(\theta, \phi) \equiv \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_{\nu\mu}^*(\theta, \phi) \cdot Y_{nm}(\theta, \phi) = \delta_{n,\nu} \delta_{m,\mu} \quad (30)$$

Les fonctions harmoniques sphériques vectorielles sont décrites dans plusieurs livres de référence [33, 34, 32, 35], mais leurs définitions et notations varient avec les auteurs. Elles forment une base complète et orthogonale pour décrire les variations angulaires de n'importe quel champ vectoriel. Nous les définissons par les équations suivante :

$$\mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) \equiv \hat{\mathbf{r}} Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (31)$$

$$\mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \equiv \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \wedge \hat{\mathbf{r}} \quad (32)$$

où

$$\mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \equiv \frac{r \nabla Y_{nm}(\theta, \phi)}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (33)$$

L'éq.(32) implique que :

$$\mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \quad (34)$$

Toutes les harmoniques sphériques vectorielles sont mutuellement orthogonales dans le sens où si  $\mathbf{W}_{nm}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dénotent respectivement les harmoniques vectorielles  $\mathbf{Y}_{nm}$ ,  $\mathbf{X}_{nm}$ , or  $\mathbf{Z}_{nm}$ , on a :

$$\langle \mathbf{W}_{nm}^{(i)} | \mathbf{W}_{\nu\mu}^{(j)} \rangle \equiv \int_0^{4\pi} \mathbf{W}_{nm}^{(i)*} \cdot \mathbf{W}_{\nu\mu}^{(j)} d\Omega = \delta_{ij} \delta_{n\nu} \delta_{m\mu} \quad (35)$$

où la définition du produit Hermitien a été étendue aux champs vectoriels.

On introduit maintenant les fonctions  $\overline{u}_n^m$  et  $\overline{s}_n^m$  définies par :

$$\overline{u}_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{m}{\sin \theta} \overline{P}_n^m(\cos \theta) \quad (36)$$

$$\overline{s}_n^m(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \frac{d}{d\theta} \overline{P}_n^m(\cos \theta) \quad (37)$$

On peut facilement calculer ces fonctions par des relations de récurrence. Les harmoniques vectorielles  $\mathbf{X}_{nm}$  et  $\mathbf{Z}_{nm}$  ont des expressions simples en fonction de  $\overline{u}_n^m$  et de  $\overline{s}_n^m$  :

$$\mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) = i\overline{u}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \overline{s}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (38)$$

$$\mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) = \overline{s}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + i\overline{u}_n^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (39)$$

Les équations (38-39), prises ensemble avec l'éq.(31), montrent que pour des indices  $n, m$  donnés que les  $(\mathbf{Y}_{nm}, \mathbf{X}_{nm}, \mathbf{Z}_{nm})$  sont mutuellement «*perpendiculaires*» dans le sens que  $\mathbf{W}_{nm}^{(i)} \cdot \mathbf{W}_{nm}^{(j)} = 0$  pour  $i \neq j$ .

Il est très pratique dans la suite de ce mémoire d'écrire les ondes multipolaires en fonction des harmoniques sphériques vectorielles et des fonctions de *Hankel* sphériques :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{nm}(kr) &\equiv h_n^+(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \\ \mathbf{N}_{nm}(kr) &\equiv \frac{1}{kr} \left[ \sqrt{n(n+1)} h_n^+(kr) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + \xi_n'(kr) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

De même, les ondes multipolaires *régulières* sont exprimées en fonction des harmoniques sphériques vectorielles et des fonctions de *Bessel* sphériques :

$$\begin{aligned} Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(kr) \} &\equiv j_n(kr) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) \\ Rg \{ \mathbf{N}_{nm}(kr) \} &\equiv \frac{1}{kr} \left[ \sqrt{n(n+1)} j_n(kr) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + \psi_n'(kr) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Dans les équations (40) et (41) nous avons introduit les fonctions de Ricatti-Bessel  $\psi_n$  et  $\xi_n$  définies par :

$$\psi_n(x) \equiv x j_n(x) \quad \text{et} \quad \xi_n(x) \equiv x h_n^+(x) \quad (42)$$

et le prime exprime la dérivée par rapport à l'argument, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \psi_n'(x) &= j_n(x) + x j_n'(x) \\ \xi_n'(x) &= h_n^+(x) + x [h_n^+(x)]'. \end{aligned} \quad (43)$$

## 8.4 Développements du champ dans des milieux homogènes

N'importe quel champ satisfaisant l'équation (18) et incident sur un système de diffuseurs peut être développé sur la base des ondes multipolaires régulières :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) &= E \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(k_e \mathbf{r}) \} a_{nm}^{(h)} + Rg \{ \mathbf{N}_{nm}(k_e \mathbf{r}) \} a_{nm}^{(e)} \right] \\ &= E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ Rg \{ \mathbf{M}_p(k_e \mathbf{r}) \} a_p^{(h)} + Rg \{ \mathbf{N}_p(k_e \mathbf{r}) \} a_p^{(e)} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

où  $a_p^{(h)}$  et  $a_p^{(e)}$  sont les coefficients respectifs des ondes sphériques  $\mathbf{M}_p$  et  $\mathbf{N}_p$ . La constante  $E$  a la dimension d'un champ électrique. Si le champ incident est une onde plane, on la choisit telle que  $\|\mathbf{E}_{\text{inc}}\|^2 = E^2$  (pour un champ incident plus général voir la réf.[8]).

La dernière ligne de l'éq.(44) introduit le procédé communément admis de remplacer les double indices  $n$ , et  $m$ , par un unique indice généralisé  $p$  où l'indice  $p$  correspond à une unique paire  $n, m$  pair par la relation :[35]

$$p = n(n+1) + m \quad (45)$$

Les relations inverses entre une valeur de  $p$  et le couple  $n, m$  correspondant sont données par :

$$\begin{aligned} n(p) &= \text{Int}\sqrt{p} \\ m(p) &= p - n(p)[n(p) + 1] \end{aligned} \quad (46)$$

Il faut se rappeler que les  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  s'expriment ici en coordonnées sphériques. L'origine du système est typiquement choisie à un endroit pratique, soit vis-à-vis du système, soit vis-à-vis du faisceau incident.

On définit une matrice en ligne :

$$Rg\{\Psi^t(k\mathbf{r})\} \equiv \{Rg\{\mathbf{M}_1\}, \dots, Rg\{\mathbf{M}_\infty\}, Rg\{\mathbf{N}_1\}, \dots, Rg\{\mathbf{N}_\infty\}\} \quad (47)$$

et  $a$  une matrice colonne :

$$a \equiv \begin{bmatrix} \vdots \\ a_p^{(h)} \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ a_p^{(e)} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (48)$$

Cette notation nous permet d'écrire le champ incident sous la forme compacte et transparente :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = ERg\{\Psi^t(k\mathbf{r})\} a \quad (49)$$

Puisqu'on va étudier des systèmes ayant plusieurs «composants» par une méthode de diffusion multiple, il est pratique de distinguer le champ *incident* envoyé sur tout le système et le champ d'*excitation* sur une particule du système (parfois appelé, champ «local»). Le champ d'excitation sur une particule est le champ qui serait présent si la particule n'était pas présente. N'importe quelle onde d'*excitation* sur une particule peut être développée sur la base des ondes multipolaires régulières :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{exc}}^{(j)}(\mathbf{r}) &= E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ Rg\{\mathbf{M}_p(k_e \mathbf{r}_j)\} \left[ e^{(j)} \right]_p^{(h)} + Rg\{\mathbf{N}_p(k_e \mathbf{r}_j)\} \left[ e^{(j)} \right]_p^{(e)} \right] \\ &= ERg\{\Psi^t(k_e \mathbf{r}_j)\} e^{(j)} \end{aligned} \quad (50)$$

où  $\mathbf{r}_j \equiv \mathbf{r} - \mathbf{x}_j$  est la position du point champ par rapport au «centre» de l'objet  $j$ . Ce centre est arbitraire dans une certaine mesure, mais on peut le prendre d'une façon générale comme le centre de la sphère circonscrite entourant l'objet. On doit remarquer pourtant que le développement du champ d'excitation n'est parfaitement fiable qu'à l'extérieur de la sphère circonscrite autour de l'objet, c'est-à-dire à des rayons où l'on est partout dans le milieu homogène à l'extérieur de la particule.

Le champ à l'intérieur d'une sphère inscrite à l'intérieur du diffuseur peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{int}}^{(j)}(\mathbf{r}) &= E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ Rg\{\mathbf{M}_p(k_s \mathbf{r})\} \left[ s^{(j)} \right]_p^{(h)} + Rg\{\mathbf{N}_p(k_s \mathbf{r})\} \left[ s^{(j)} \right]_p^{(e)} \right] \\ &= ERg\{\Psi^t(k_s \mathbf{r})\} s^{(j)} \end{aligned} \quad (51)$$

où  $k_s$  est le nombre d'onde du milieu homogène à l'intérieur de la sphère inscrite.

## 8.5 Matrice- $T$

On prend un système de plusieurs objets qu'on va dénombrer par  $j = 1, \dots, N$ . Le champ diffusé par le  $j^e$  objet du système,  $\mathbf{E}_s^{(j)}$ , peut être développé en termes des fonctions d'ondes partielles  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  qui satisfont la condition d'onde sortante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{diff}}^{(j)}(\mathbf{r}_j) &= E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \mathbf{M}_p(k_e \mathbf{r}_j) \left[ f^{(j)} \right]_p^{(h)} + \mathbf{N}_p(k_e \mathbf{r}_j) \left[ f^{(j)} \right]_p^{(e)} \right] \\ &= E\Psi^t(k_e(\mathbf{r} - \mathbf{x}_j)) f^{(j)} \end{aligned} \quad (52)$$

où la matrice colonne  $f^{(j)}$  contient les coefficients du champ diffusé.

Une solution pour un système composé d'un seul diffuseur est «simplement» de déterminer les coefficients du champ diffusé,  $f^{(j)}$ , à partir des coefficients du champ incident  $a$  en assurant que les équations de Maxwell sont satisfaites à l'intérieur du diffuseur et que les conditions aux limites sur les champs sont satisfaites aux interfaces entre le diffuseur et le milieu extérieur.

Si par contre, l'objet fait simplement partie d'un système contenant d'autres objets, et que l'on veuille traiter le système complet par la technique de diffusion multiple, on ne connaît pas à l'avance l'onde d'excitation sur la particule, puisque l'onde d'excitation sur l'objet est composée de l'onde incidente, et des champs diffusés par les autres objets du système. Pour de tels systèmes de diffusion multiple, on a besoin d'une solution complète de l'objet qu'on représente le plus souvent par la *matrice-T*.

Par définition, la matrice- $T$  d'une particule  $j$  exprimée sur la base des ondes partielles s'exprime par :

$$f^{(j)} \equiv t^{(j)} e^{(j)} \quad (53)$$

où  $e^{(j)}$  et  $f^{(j)}$  dénotent respectivement les coefficients du champ d'excitation et de diffusion de la particule  $j$ . On choisit d'utiliser le symbole « $t$ » plutôt que « $T$ » pour la matrice- $T$  d'un objet seul afin de réserver le symbole « $T$ » pour des matrices- $T$  décrivant la diffusion multiple (voir section 8.8).

## 8.6 Développements du champ dans des milieux hétérogènes

Si le milieu n'est pas homogène, le champ électrique n'est pas une solution de l'équation (18), et l'on ne peut pas généralement développer le champ en fonction des ondes multipolaires. Les harmoniques sphériques vectorielles restent néanmoins un bon moyen d'écrire le champ. Notamment, n'importe quel champ vectoriel peut être décrit comme des fonctions de la distance radiale  $r$  qui multiplient des harmoniques sphériques vectorielles.

Prenons un objet non-sphérique composé d'un milieu isotrope et homogène comme illustré sur la figure 4. N'importe quel champ vectoriel peut être décrit comme des fonctions radiales qui multiplient des harmoniques sphériques vectorielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left[ E_{nm}^{(Y)}(r) \mathbf{Y}_{nm}(\theta, \phi) + E_{nm}^{(X)}(r) \mathbf{X}_{nm}(\theta, \phi) + E_{nm}^{(Z)}(r) \mathbf{Z}_{nm}(\theta, \phi) \right] \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left[ E_p^{(Y)}(r) \mathbf{Y}_p(\theta, \phi) + E_p^{(X)}(r) \mathbf{X}_p(\theta, \phi) + E_p^{(Z)}(r) \mathbf{Z}_p(\theta, \phi) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Un avantage de cette représentation des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  est la simplicité de l'action du rotationnel sur cette base. L'équation  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_e\mu_0\mathbf{H}$  devient dans la représentation de l'équation (54) :

$$a_p \frac{E_{Xp}}{r} = i\omega\mu_e\mu_0 H_{Yp} \quad (55a)$$

$$a_p \frac{E_{Yp}}{r} - \frac{E_{Zp}}{r} - \frac{dE_{Zp}}{dr} = i\omega\mu_e\mu_0 H_{Xp} \quad (55b)$$

$$\frac{E_{Xp}}{r} + \frac{dE_{Xp}}{dr} = i\omega\mu_e\mu_0 H_{Zp} \quad (55c)$$

De façon similaire, l'équation  $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}$  s'écrit :

$$a_p \frac{H_{Xp}}{r} = -i\omega D_{Yp} \quad (56a)$$

$$a_p \frac{H_{Yp}}{r} - \frac{H_{Zp}}{r} - \frac{dH_{Zp}}{dr} = -i\omega D_{Xp} \quad (56b)$$

$$\frac{H_{Xp}}{r} + \frac{dH_{Xp}}{dr} = -i\omega D_{Zp} \quad (56c)$$

Pour un milieu homogène, on peut résoudre ces équations et l'on retombe sur les ondes partielles de la section 8.4. On verra dans section 9.5 comment on a pu exploiter ces équations ainsi que les récents progrès dans la théorie différentielle des réseaux afin de construire une nouvelle théorie différentielle pour des objets tridimensionnels.

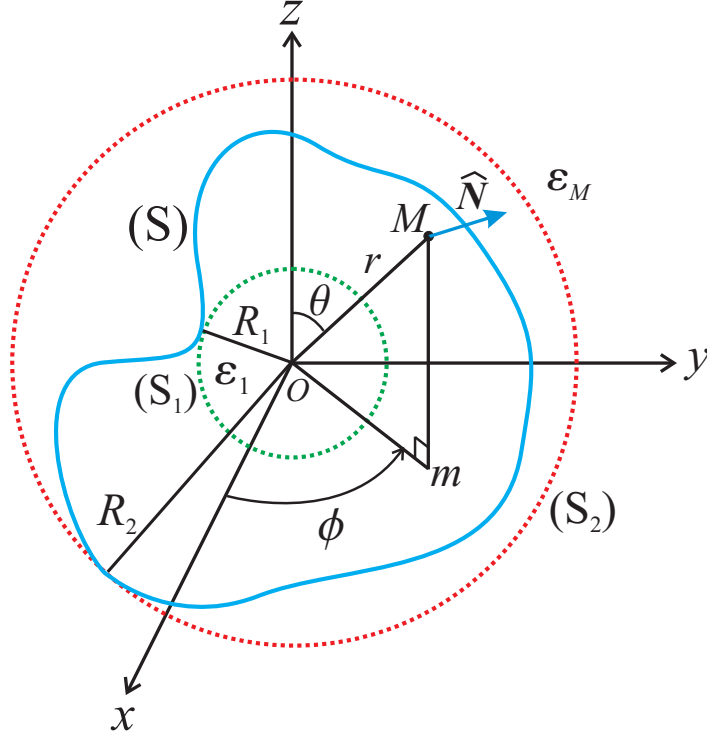


FIG. 4 – Objet de forme arbitraire. La sphère inscrite (verte) et la sphère circonscrite (rouge) sont en pointillées. La surface de l'objet est en trait plein (bleu).

### 8.7 Matrice- $T$ d'une sphère isotrope (Théorie de Mie)

Comme exemple de l'utilité des harmoniques sphériques vectorielles, on montre dans cette section qu'elles facilitent l'obtention de la matrice- $T$  d'une sphère isotrope. On tombe sur les résultats donnés par la célèbre théorie de Mie (1908). Toutefois la théorie de Mie était formulée directement en réponse à une onde plane incidente, alors que la matrice- $T$  s'applique à n'importe quelle onde incidente. Cette section sert également à préparer le terrain pour notre théorie récente de la matrice- $T$  d'une sphère anisotrope.[1, 3]

Le champ à l'extérieur d'une sphère se décompose en champ d'excitation,  $\mathbf{E}_{\text{exc}}$ , et en champ diffusé,  $\mathbf{E}_{\text{diff}}$ . Les champs  $\mathbf{E}_{\text{exc}}$  et  $\mathbf{E}_{\text{diff}}$  sont respectivement développés sur les ondes partielles selon les équations (50) et (52).

Une comparaison entre ces développements en ondes multipolaires et les développements généraux d'un champ en termes des harmoniques sphériques vectorielles de l'équation (54) (voir aussi les éqs.(40) et (41)), montre que les fonctions  $E_{e,p}^{(Y)}$ ,  $E_{e,p}^{(X)}$ , et  $E_{e,p}^{(Z)}$  du champ à l'extérieur de la sphère sont :

$$\begin{aligned}
 E_{e,p}^{(Y)}(r) &= E \sqrt{n(n+1)} \left[ \frac{j_n(k_e r)}{k_e r} e_p^{(e)} + \frac{h_n^+(k_e r)}{k_e r} f_p^{(e)} \right] \\
 E_{e,p}^{(X)}(r) &= \frac{E}{k_e r} \left[ \psi_n(k_e r) e_p^{(h)} + \xi_n(k_e r) f_p^{(h)} \right] \\
 E_{e,p}^{(Z)}(r) &= \frac{E}{k_e r} \left[ \psi'_n(k_e r) e_p^{(e)} + \xi'_n(k_e r) f_p^{(e)} \right]
 \end{aligned} \tag{57}$$

De même, un regard sur le développement du champ à l'intérieur donne :

$$\begin{aligned} E_{s,p}^{(Y)}(r) &= E \sqrt{n(n+1)} \frac{j_n(k_s r)}{k_s r} s_p^{(e)} \\ E_{s,p}^{(X)}(r) &= \frac{E}{k_s r} \psi_n(k_s r) s_p^{(h)} \\ E_{s,p}^{(Z)}(r) &= \frac{E}{k_s r} \psi'_n(k_s r) s_p^{(e)} \end{aligned} \quad (58)$$

où  $k_s^2 \equiv \varepsilon_s \mu_s k_0^2$  et  $\varepsilon_s$  et  $\mu_s$  sont respectivement la permittivité relative et la perméabilité relative du diffuseur. Les champs  $\mathbf{H}$  correspondants peuvent être déduits de l'équation Maxwell-Faraday :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_r\mu_0} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (59)$$

où  $\mu_r$  est la perméabilité magnétique relative du matériau (soit  $\mu_e$  à l'extérieur de la sphère soit  $\mu_s$  à l'intérieur). Insérant les développements en ondes partielles des équations (52)-(50) et utilisant les relations :

$$\nabla \times \mathbf{M}_p(k\mathbf{r}) = k\mathbf{N}_p(k\mathbf{r}) \quad \nabla \times \mathbf{N}_p(k\mathbf{r}) = k\mathbf{M}_p(k\mathbf{r}) \quad (60)$$

on obtient pour le champ  $\mathbf{H}$  diffusé,  $\mathbf{H}_{\text{diff}}$ , et le champ  $\mathbf{H}$  d'excitation,  $\mathbf{H}_{\text{exc}}$ , les développements :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{diff}}(\mathbf{r}) &= \frac{k_e}{i\omega\mu_e\mu_0} E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \mathbf{N}_p(k_e \mathbf{r}) f_p^{(h)} + \mathbf{M}_{nm}(k_e \mathbf{r}) f_p^{(e)} \right] \\ \mathbf{H}_{\text{exc}}(\mathbf{r}) &= \frac{k_e}{i\omega\mu_e\mu_0} E \sum_{p=1}^{\infty} \left[ Rg \{ \mathbf{N}_p(k_e \mathbf{r}) \} e_p^{(h)} + Rg \{ \mathbf{M}_{nm}(k_e \mathbf{r}) \} e_p^{(e)} \right] \end{aligned} \quad (61)$$

d'où l'on peut écrire par analogie avec l'éq.(57) :

$$\begin{aligned} H_{e,p}^{(Y)}(r) &= \frac{a_p}{i\omega\mu_e\mu_0} \frac{E}{r} \left[ j_n(k_e r) e_p^{(h)} + h_n(k_e r) f_p^{(h)} \right] \\ H_{e,p}^{(X)}(r) &= \frac{1}{i\omega\mu_e\mu_0} \frac{E}{r} \left[ \psi_n(k_e r) e_p^{(e)} + \xi_n(k_e r) f_p^{(e)} \right] \\ H_{e,p}^{(Z)}(r) &= \frac{1}{i\omega\mu_e\mu_0} \frac{E}{r} \left[ \psi'_n(k_e r) e_p^{(h)} + \xi'_n(k_e r) f_p^{(h)} \right] \end{aligned} \quad (62)$$

De la même manière, le champ  $\mathbf{H}$  à l'intérieur du diffuseur s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{s,p}^{(Y)}(r) &= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{i\omega\mu_s\mu_0} \frac{E}{r} j_n(k_s r) s_p^{(h)} \\ H_{s,p}^{(X)}(r) &= \frac{1}{i\omega\mu_s\mu_0} \frac{E}{r} \psi_n(k_s r) s_p^{(e)} \\ H_{s,p}^{(Z)}(r) &= \frac{1}{i\omega\mu_s\mu_0} \frac{E}{r} \psi'_n(k_s r) s_p^{(h)} \end{aligned} \quad (63)$$

On remarque qu'à la surface d'une sphère que les composantes  $H_p^{(Y)}(r) \mathbf{Y}_p$  et  $E_p^{(Y)}(r) \mathbf{Y}_p$  des champs sont normales à la surface, alors que les composantes  $E_p^{(X)}(r) \mathbf{X}_p$ ,  $H_p^{(X)}(r) \mathbf{X}_p$ ,  $E_p^{(Z)}(r) \mathbf{Z}_p$ ,  $H_p^{(Z)}(r) \mathbf{Z}_p$ , sont tangentielles à la surface. Combinant la continuité des composantes tangentielles des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  et l'orthogonalité des harmoniques sphériques vectorielles, nous obtenons les quatre équations :

$$\begin{aligned} \frac{E}{k_e R} \left[ \psi_n(k_e R) e_p^{(h)} + \xi_n(k_e R) f_p^{(h)} \right] &= \frac{E}{k_s R} \psi_n(k_s R) i_p^{(h)} \\ \frac{E}{k_e R} \left[ \psi'_n(k_e R) e_p^{(e)} + \xi'_n(k_e R) f_p^{(e)} \right] &= \frac{E}{k_s R} \psi'_n(k_s R) i_p^{(e)} \\ \frac{1}{i\omega\mu_e\mu_0} \frac{E}{R} \left[ \psi_n(k_e R) e_p^{(e)} + \xi_n(k_e R) f_p^{(e)} \right] &= \frac{1}{i\omega\mu_s\mu_0} \frac{E}{R} \psi_n(k_s R) i_p^{(e)} \\ \frac{1}{i\omega\mu_e\mu_0} \frac{E}{R} \left[ \psi'_n(k_e R) e_p^{(h)} + \xi'_n(k_e R) f_p^{(h)} \right] &= \frac{1}{i\omega\mu_s\mu_0} \frac{E}{R} \psi'_n(k_s R) i_p^{(h)} \end{aligned} \quad (64)$$

ce qu'on peut récrire comme :

$$\begin{aligned}
 \frac{k_s}{k_e} \left[ \psi_n(k_e R) e_p^{(h)} + \xi_n(k_e R) f_p^{(h)} \right] &= \psi_n(k_s R) i_p^{(h)} \\
 \frac{k_s}{k_e} \left[ \psi'_n(k_e R) e_p^{(e)} + \xi'_n(k_e R) f_p^{(e)} \right] &= \psi'_n(k_s R) i_p^{(e)} \\
 \frac{1}{\mu_e} \left[ \psi_n(k_e R) e_p^{(e)} + \xi_n(k_e R) f_p^{(e)} \right] &= \frac{1}{\mu_s} \psi_n(k_s R) i_p^{(e)} \\
 \frac{1}{\mu_e} \left[ \psi'_n(k_e R) e_p^{(h)} + \xi'_n(k_e R) f_p^{(h)} \right] &= \frac{1}{\mu_s} \psi'_n(k_s R) i_p^{(h)}
 \end{aligned} \tag{65}$$

Changeant l'ordre des équations et en arrangeant les expressions, on obtient :

$$\psi_n(k_s R) s_p^{(h)} = \rho_s \psi_n(k_e R) e_p^{(h)} + \rho_s \xi_n(k_e R) f_p^{(h)} \tag{66a}$$

$$\mu_e \psi'_n(k_s R) s_p^{(h)} = \mu_s \psi'_n(k_e R) e_p^{(h)} + \mu_s \xi'_n(k_e R) f_p^{(h)} \tag{66b}$$

$$\psi'_n(k_s R) s_p^{(e)} = \rho_s \psi'_n(k_e R) e_p^{(e)} + \rho_s \xi'_n(k_e R) f_p^{(e)} \tag{66c}$$

$$\mu_e \psi_n(k_s R) s_p^{(e)} = \mu_s \psi_n(k_e R) e_p^{(e)} + \mu_s \xi_n(k_e R) f_p^{(e)} \tag{66d}$$

où  $\rho_s \equiv \frac{k_s}{k_e} = \frac{n_s}{n_e} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s \mu_s}{\varepsilon_e \mu_e}}$ . On obtient la matrice en éliminant les coefficients  $s_p^{(h)}$  et  $s_p^{(e)}$  de ces équations.

En éliminant  $s_p^{(h)}$  des équations (66a) et (66b), on obtient :

$$f_p^{(h)} = \frac{\mu_s \psi'_n(k_e R) \psi_n(k_s R) - \rho_s \mu_e \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R)}{\rho_s \mu_e \psi'_n(k_s R) \xi_n(k_e R) - \mu_s \xi'_n(k_e R) \psi_n(k_s R)} e_p^{(h)} \tag{67}$$

De même, en éliminant  $s_p^{(e)}$  des équations (66c) et (66d) on obtient :

$$f_p^{(e)} = \frac{\mu_s \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R) - \rho_s \mu_e \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)}{\rho_s \mu_e \psi_n(k_s R) \xi'_n(k_e R) - \mu_s \xi_n(k_e R) \psi'_n(k_s R)} e_p^{(e)} \tag{68}$$

Donc, on voit qu'on peut écrire la solution sous la forme :

$$\begin{bmatrix} f_p^{(h)} \\ f_p^{(e)} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} e_p^{(h)} \\ e_p^{(e)} \end{bmatrix} \tag{69}$$

où la matrice  $t$  est de la forme

$$[t] = \begin{bmatrix} [t^{(h,h)}] & [t^{(e,h)}] \\ [t^{(h,e)}] & [t^{(e,e)}] \end{bmatrix} \tag{70}$$

avec

$$[t^{(h,h)}]_{pp'} = \delta_{pp'} t_n^{(h)} \quad [t^{(e,e)}]_{pp'} = \delta_{pp'} t_n^{(e)} \quad [t_n^{(h,e)}]_{pp'} = [t_n^{(e,h)}]_{pp'} = 0 \tag{71}$$

et les éléments diagonaux s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 t_n^{(h)} &= \frac{\frac{\mu_s}{\mu_e} \psi'_n(k_e R) \psi_n(k_s R) - \rho_s \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R)}{\rho_s \psi'_n(k_s R) \xi_n(k_e R) - \frac{\mu_s}{\mu_e} \xi'_n(k_e R) \psi_n(k_s R)} \\
 t_n^{(e)} &= \frac{\frac{\mu_s}{\mu_e} \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R) - \rho_s \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)}{\rho_s \psi_n(k_s R) \xi'_n(k_e R) - \frac{\mu_s}{\mu_e} \xi_n(k_e R) \psi'_n(k_s R)}
 \end{aligned} \tag{72}$$

On peut également vouloir connaître les coefficients du champ à l'intérieur de la sphère. En éliminant  $e_p^{(h)}$  des équations (66a) et (66b), on obtient :

$$[\mu_s \psi'_n(k_e R) \psi_n(k_s R) - \rho_s \psi_n(k_e R) \mu_e \psi'_n(k_s R)] s_p^{(h)} = \rho_s \mu_s [\psi'_n(k_e R) \xi_n(k_e R) - \psi_n(k_e R) \xi'_n(k_e R)] f_p^{(h)}$$

Utilisant la relation du Wronskien :

$$\psi_n(x) \xi'_n(x) - \psi'_n(x) \xi_n(x) = i \tag{73}$$

on obtient :

$$s_p^{(h)} = \frac{i\mu_s \rho_s}{\mu_e \rho_s \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R) - \mu_s \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)} f_p^{(h)} \quad (74)$$

De même, en éliminant  $e_p^{(e)}$  des équations (66c) et (66d) et utilisant la relation du Wronskien, on obtient :

$$s_p^{(e)} = \frac{i\mu_s \rho_s}{\mu_s \psi_n(k_e R) \psi'_n(k_s R) - \mu_e \rho_s \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)} f_p^{(e)} \quad (75)$$

Les relations entre les coefficients du champ à l'intérieur et ceux du champ diffusé peuvent être écrites sous une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} s_p^{(h)} \\ s_p^{(e)} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} f_p^{(h)} \\ f_p^{(e)} \end{bmatrix} \quad (76)$$

où la matrice  $\Lambda$  a la forme :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^{(h,h)} \\ \Lambda^{(h,e)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Lambda^{(e,h)} \\ \Lambda^{(e,e)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (77)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \Lambda^{(h,h)} \end{bmatrix}_{pp'} = \delta_{pp'} \Lambda_n^{(h)} \quad \begin{bmatrix} \Lambda_n^{(e,e)} \end{bmatrix}_{pp'} = \delta_{pp'} \Lambda_n^{(e)} \quad \begin{bmatrix} \Lambda_n^{(h,e)} \end{bmatrix}_{pp'} = \begin{bmatrix} \Lambda_n^{(e,h)} \end{bmatrix}_{pp'} = 0 \quad (78)$$

et où les  $\Lambda_n^{(h)}$ ,  $\Lambda_n^{(e)}$  sont exprimés par :

$$\begin{aligned} \Lambda_n^{(h)} &= \frac{i \frac{\mu_s}{\mu_e} \rho_s}{\rho_s \psi'_n(k_s R) \psi_n(k_e R) - \frac{\mu_s}{\mu_e} \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)} \\ \Lambda_n^{(e)} &= \frac{i \frac{\mu_s}{\mu_e} \rho_s}{\frac{\mu_s}{\mu_e} \psi_n(k_e R) \psi'_n(k_s R) - \rho_s \psi_n(k_s R) \psi'_n(k_e R)} \end{aligned} \quad (79)$$

Nous avons donc constaté que la matrice- $T$  d'une sphère isotrope s'obtient directement grâce à l'emploi des ondes multipolaires et leurs propriétés. Nous continuerons à constater que l'emploi des ondes multipolaires et des harmoniques sphériques va simplifier les dérivations de formules susceptibles d'avoir des applications numériques intéressantes.

## 8.8 Diffusion multiple par la technique de la fonction de Green

Il est possible d'aborder le problème de la diffusion multiple avec la technique de la fonction de Green,  $\mathbf{G}$ , du système. Pour cette construction, il nous faut la fonction de Green d'un milieu homogène,  $\mathbf{G}_0$ , les matrices- $T$  individuelles,  $\mathbf{t}^{(j)}$ , et le concept de champ d'excitation. Nous verrons que toute cette discussion sera facilitée en adoptant un formalisme opérateur.

### 8.8.1 La forme opérateur de la fonction de Green

En l'absence d'un contraste de perméabilité magnétique (c'est à dire  $\mu_r(\mathbf{r}) = 1$  partout), la fonction de Green correspondant à l'équation (17) est :

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbb{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (80)$$

où  $\mathbb{I}$  est l'identité dans un espace vectoriel et  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la projection d'un opérateur  $\mathbf{G}$  dans l'espace direct.

Explicitement, l'opérateur  $\mathbf{G}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{G} = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \mathbf{G} |\mathbf{r}'\rangle \langle \mathbf{r}'| \quad (81)$$

où

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{G}_0 |\mathbf{r}'\rangle \equiv \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (82)$$

Les états de position  $|\mathbf{r}\rangle$  ont une normalisation en fonction delta tridimensionnel :

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (83)$$



et forment une base complète :

$$\int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| = 1 \quad (84)$$

La fonction de Green,  $\mathbf{G}$ , d'un système quelconque constitue une solution complète du problème électromagnétique puisque n'importe quel champ électrique,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , produit par un courant source  $\mathbf{J}_{\text{src}}$  est obtenu grâce à une intégrale de convolution ; c'est-à-dire que le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle \quad (85)$$

où  $\langle \mathbf{r}' | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle \equiv i\omega\mu_e\mu_0\mathbf{J}_{\text{src}}(\mathbf{r}')$  est proportionnel à la distribution de courants sources du problème. Utilisant la définition donnée par l'équation (80), on peut vérifier que  $\mathbf{E}$  est une solution de l'équation (17) avec  $\mu_r(\mathbf{r}) = 1$ .

Une *fonction* de Green n'existe pas à proprement parler, mais on peut la définir comme une distribution. La définition de la «fonction de Green» comme une distribution convient puisque notre but est de l'utiliser dans les intégrales telles que celle de l'équation (85). L'évaluation des distributions est souvent facilitée en travaillant dans l'espace réciproque. Le passage à l'espace réciproque dans le formalisme opérateur est obtenu en définissant des états  $|\mathbf{k}\rangle$  tels que :

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \equiv \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \quad \langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle \equiv \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}} \quad (86)$$

Les états  $|\mathbf{k}\rangle$ , comme les états de position  $|\mathbf{r}\rangle$ , ont une normalisation en fonction delta :

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \int d\mathbf{r} \frac{e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (87)$$

et forment une base complète :

$$\int d\mathbf{k} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| = 1 \quad (88)$$

Une représentation alternative de l'opérateur  $\mathbf{G}$  est donc :

$$\mathbf{G} = \iint d\mathbf{k} d\mathbf{k}' |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| \mathbf{G} |\mathbf{k}'\rangle \langle \mathbf{k}'| \quad (89)$$

où

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k} | \mathbf{G} | \mathbf{k}' \rangle &= \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \mathbf{k} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \mathbf{G} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \mathbf{k}' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} \end{aligned} \quad (90)$$

Nous constaterons que le formalisme opérateur nous apportera de la flexibilité dans les manipulations qui mènent à des solutions des fonctions de Green.

### 8.8.2 Fonction de Green dans un milieu homogène

L'équation de Green pour un milieu homogène s'écrit dans l'espace direct :

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - k_e^2 \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbb{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (91)$$

où  $k_e^2 = \varepsilon_e \mu_e k_0^2$  ne dépend pas de la position. Il n'est pas pratique de résoudre cette équation directement dans l'espace direct. On choisit donc de passer à l'espace réciproque où l'équation de Green s'écrit :

$$-\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} \wedge \mathbf{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - k_e^2 \mathbf{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (92)$$

En utilisant l'identité :

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} \wedge \mathbf{A} = -k^2 \left( \mathbb{I} - \widehat{\mathbf{k}}\widehat{\mathbf{k}} \right) \mathbf{A} \quad (93)$$

on obtient :

$$k^2 \left( \mathbb{I} - \widehat{\mathbf{k}}\widehat{\mathbf{k}} \right) \mathbf{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') - k_e^2 \mathbf{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (94)$$

qui a pour solution :

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \langle \mathbf{k} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{k}' \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ \frac{\mathbb{I} - \widehat{\mathbf{k}}\widehat{\mathbf{k}}}{k^2 - k_e^2} - \frac{\widehat{\mathbf{k}}\widehat{\mathbf{k}}}{k_e^2} \right] \quad (95)$$

On peut maintenant obtenir la fonction de Green dans l'espace direct en faisant une transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}_2 \rangle &= \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{G}_0(\mathbf{r}) \\ &= \frac{e^{ik_e r}}{4\pi k_e^2 r^3} \text{V.P.} \left\{ (1 - ik_e r - k_e^2 r^2) (\mathbb{I} - \widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{r}}) - 2(1 - ik_e R) \widehat{\mathbf{r}}\widehat{\mathbf{r}} \right\} + \frac{1}{3k_e^2} \delta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (96)$$

où  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . La valeur principale indique qu'il faut exclure un volume infinitésimal sphérique ou cubique autour du point  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . On peut utiliser d'autres formes pour le volume d'exclusion, mais il faut modifier le terme en fonction delta afin que son application dans les équations intégrales telles que l'équation (85) reste invariante. (voir Ref.[36] chap. 8)

On appelle désormais *champ incident*, le champ électrique  $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r})$  produit par un courant source  $\mathbf{J}_{\text{src}}$  dans ce milieu. On peut l'obtenir par la formule :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{E}_{\text{inc}} \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle = \int d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r} | \mathbf{G}_0 | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle \quad (97)$$

où  $\langle \mathbf{r}' | \mathbf{J}_{\text{src}} \rangle \equiv i\omega\mu_e\mu_0\mathbf{J}_{\text{src}}(\mathbf{r}')$ .

### 8.8.3 Le potentiel d'un diffuseur discret

On introduit des inhomogénéités dans le système en appelant un «diffuseur», chaque région ayant des permittivités et perméabilités constantes et différentes de celles du milieu externe. Chaque diffuseur  $j$  est caractérisé par ses paramètres constitutifs relatifs  $\varepsilon_j$  et  $\mu_j$  et par une fonction de Heaviside,  $\varkappa$  :

$$\begin{aligned} \varkappa^{(j)}(\mathbf{r}) &= 1 && \text{si } \mathbf{r} \text{ est à l'intérieur du diffuseur } j \\ \varkappa^{(j)}(\mathbf{r}) &= 0 && \text{si } \mathbf{r} \text{ est à l'extérieur du diffuseur } j \end{aligned} \quad (98)$$

La position de chaque diffuseur est dénotée par  $\mathbf{x}_j$  qui est le centre de la sphère circonscrite au diffuseur (voir la figure 5).

Si il n'y a pas de contraste de la perméabilité magnétique (c'est-à-dire on prend la perméabilité relative  $\mu(\mathbf{r}) = 1$  partout), on peut écrire l'équation (17) gouvernant l'évolution du champ  $\mathbf{E}$  dans un milieu inhomogène en termes des potentiels,  $\mathbf{u}^{(j)}$  :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_e \mathbf{E} - \sum_{j=1}^N \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{J}_{\text{src}} \quad (99)$$

où l'opérateur  $\mathbf{u}^{(j)}$  dans la représentation des coordonnées s'écrit :

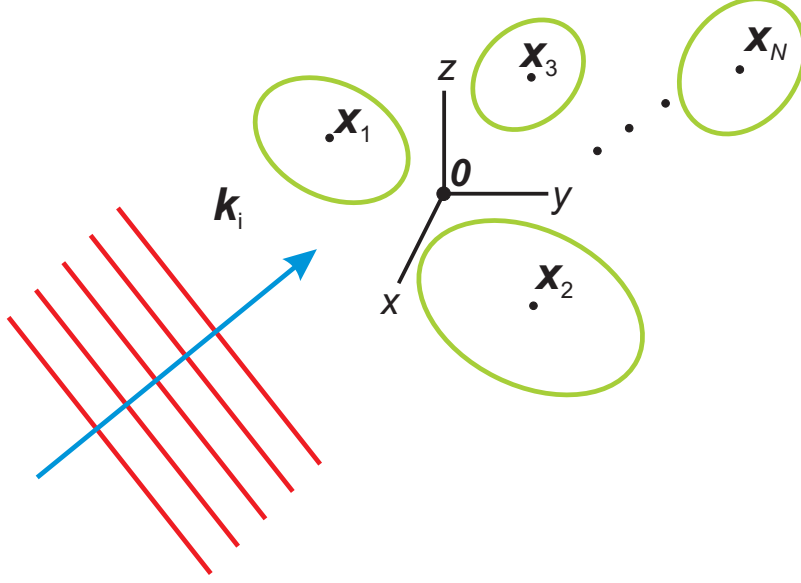
$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{u}^{(j)} | \mathbf{r}' \rangle = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 (\varepsilon_j - \varepsilon_e) \varkappa^{(j)}(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbb{I} \quad (100)$$

La fonction de Green associée à l'équation (99) est donc définie par :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_e \mathbf{G} - \sum_{j=1}^N \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G} = \mathbb{I} \quad (101)$$

Finalement, il est pratique pour la suite de reformuler l'équation (101) en termes de la fonction de Green «non-perturbée»,  $\mathbf{G}_0$ , du milieu homogène externe :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \sum_{j=1}^N \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G} \quad (102)$$

FIG. 5 – Système de  $N$  objets soumis à un champ incident.

L'équation (102) n'est pas encore sous une forme très pratique à résoudre. Bien que le potentiel soit de forme assez pratique dans l'espace direct (voir l'éq.(100)),  $\mathbf{G}_0$  est assez compliqué dans l'espace direct (voir l'éq.(96)). On pourrait être tenté de résoudre (102) dans l'espace de Fourier puisque  $\mathbf{G}_0$  y est relativement simple (voir l'éq.(95)). Il est par contre difficile de calculer la transformée de Fourier de  $\mathbf{u}^{(j)}$  pour un objet de forme arbitraire. Pour une sphère isotrope, on peut effectuer la transformée de Fourier et l'on obtient :

$$\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}') = \langle \mathbf{k} | \mathbf{u}^{(j)} | \mathbf{k}' \rangle = \frac{R_j^2}{2\pi^2} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 (\varepsilon_s - \varepsilon_e) \frac{j_1(R_j |\mathbf{k}' - \mathbf{k}|)}{|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|} \mathbb{I} \quad (103)$$

où  $R_j$  est le rayon de la  $j^e$  sphère. Même dans ce cas simple, la valeur absolue dans le potentiel rendrait la résolution de l'éq.(102) assez difficile.

#### 8.8.4 La forme opérateur de la matrice- $T$

L'équation (102) n'est un bon départ pour résoudre les équations de diffusion multiple que dans le cas où le contraste d'indice serait suffisamment petit. Dès que le contraste d'indice devient notable, il est avantageux de reformuler les équations de diffusion multiple en terme de matrices  $T$ .

On définit la matrice  $T$  d'un diffuseur isolé  $j$ , dénotée  $\mathbf{t}^{(j)}$ , comme la solution d'une équation du type Lippmann-Schwinger :

$$\mathbf{t}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j)} + \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G}_0 \mathbf{t}^{(j)} \quad (104)$$

Cette équation a l'air simple, mais il faut se rappeler qu'elle représente une équation intégrale. Dans l'espace de Fourier par exemple, l'équation (104) s'écrit :

$$\mathbf{t}^{(j)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}') = \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}') + \int d^3 \mathbf{k}_1 \mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}_1) \mathbf{G}_0(\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2) \mathbf{t}^{(j)}(\mathbf{k}_2|\mathbf{k}') \quad (105)$$

Si l'on insère les résultats des équations (95) et (103) pour  $\mathbf{G}_0(\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2)$  et  $\mathbf{u}^{(j)}(\mathbf{k}|\mathbf{k}')$  dans l'équation (105), on s'aperçoit immédiatement de la difficulté à résoudre une telle équation, même pour une sphère isotrope (l'essentiel de la difficulté venant des facteurs  $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}|$  dans le potentiel). Dans le langage de la théorie quantique des champs ou dans celui du problème à  $N$ -corps, on appellera cette matrice- $T$  opérateur une

matrice- $T$  hors couche de masse en empruntant une expression de la physique des particules, «off mass shell». Grâce à l'utilisation des ondes partielles introduites en section 8.2, on va pouvoir éviter de résoudre l'équation (105) dans beaucoup de circonstances, notamment quand il y a un nombre fini de diffuseurs par exemple.

Pour l'instant, il nous suffit de remarquer qu'une solution formelle de l'équation (104) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(j)} &= \left( \mathbb{I} - \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G}_0 \right)^{-1} \mathbf{u}^{(j)} \\ &= \mathbf{u}^{(j)} \left( \mathbb{I} - \mathbf{G}_0 \mathbf{u}^{(j)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (106)$$

S'il n'y a qu'un seul objet  $j$  dans le système, la matrice  $\mathbf{t}^{(j)}$  constitue une solution complète de la fonction de Green. Explicitement, s'il n'y a qu'un seul objet la fonction de Green s'écrit :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G} \quad (107)$$

On peut réécrire cette relation comme :

$$\mathbf{u}^{(j)} \mathbf{G} = \mathbf{u}^{(j)} \left( \mathbb{I} - \mathbf{G}_0 \mathbf{u}^{(j)} \right)^{-1} \mathbf{G}_0 \quad (108)$$

Une comparaison avec les éqs.(106) et (107) montre alors que la fonction de Green pour un objet isolé s'écrit :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \mathbf{t}^{(j)} \mathbf{G}_0 \quad (109)$$

En présence d'un courant source  $\mathbf{J}_s$ , le champ incident s'écrit  $\mathbf{E}_i = \mathbf{G}_0 |\mathbf{J}_s\rangle$  et le champ total s'écrit  $\mathbf{E}_t = \mathbf{G} |\mathbf{J}_s\rangle$ . On peut en déduire que le champ diffusé par la particule  $j$  est donné par :

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{G}_0 \mathbf{t}^{(j)} \mathbf{G}_0 |\mathbf{J}\rangle \quad (110)$$

On peut évaluer les opérateurs  $\mathbf{G}_0$  et  $\mathbf{t}^{(j)}$  sur la base des ondes multipolaires, et après un certain nombre de manipulations, on trouve qu'aux positions  $\mathbf{r}$  à l'extérieur d'une sphère circonscrite autour de l'objet, le champ électrique diffusé s'exprime par :

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \Psi^t(k_e \mathbf{r}_j) t^{(j)} J^{(j,0)} a \quad (111)$$

où  $t^{(j)}$  est la matrice  $t$  de l'objet  $j$ , «sur couche de masse» dans la représentation des ondes multipolaires (voir l'équation (53)). Ici nous avons utilisé la notation condensée de la section 8.4 afin d'exprimer les développements en ondes multipolaires. La matrice  $J^{(j,0)} \equiv J(k_e \mathbf{x}_j)$  est une matrice de translation régulière dont les éléments ont des expressions analytiques (voir l'appendice A). L'utilisation du symbole  $J$  dans la matrice de translation sert à rappeler que  $J^{(j,0)}$  s'écrit en termes de fonctions de Bessel sphériques,  $j_n(k_e x_j)$ . [37] La matrice colonne « $a$ » est composée des coefficients de l'onde incidente et ces coefficients peuvent en principe être calculés directement à partir des courants sources par les intégrales :

$$\begin{aligned} [a]_{nm}^{(e)} &= -k_e \omega \mu_0 \mu_e \int d\mathbf{x}' h_n^+(k_e x') \mathbf{X}_{nm}^*(\theta', \phi') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \\ [a]_{nm}^{(h)} &= -k_e \omega \mu_0 \mu_e \int d\mathbf{x}' h_n^+(k_e x') \mathbf{Z}_{nm}^*(\theta', \phi') \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (112)$$

où  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$  est la densité des courants sources.

On souligne que l'expression multipolaire du champ diffusé de l'éq.(111) constitue un énorme progrès pratique puisqu'un grand nombre de techniques numériques peuvent générer la matrice  $t^{(j)}$  d'un objet isolé.

### 8.8.5 La matrice- $T$ à diffusion multiple

On peut récrire l'équation de diffusion multiple de l'équation (102) en définissant des matrices- $T$  à diffusion multiple, dénotées  $\mathbf{T}^{(j)}$ . Les matrices  $\mathbf{T}^{(j)}$  sont définies par  $N$  équations couplées :

$$\mathbf{T}^{(j)} = \mathbf{t}^{(j)} + \mathbf{t}^{(j)} \mathbf{G}_0 \sum_{l=1, l \neq j}^N \mathbf{T}^{(l)} \quad j = 1, \dots, N \quad (113)$$

où  $N$  est le nombre d'objets dans le système. Chaque  $\mathbf{T}^{(j)}$  décrit le champ diffusé par un objet  $j$  en tenant compte des influences de tous les autres diffuseurs du système. Si nous pouvons résoudre ces équations, nous avons une solution complète des équations de diffusion multiple, puisque la fonction de Green du système s'écrit maintenant :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0 \sum_{j=1}^N \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{G}_0 \quad (114)$$

Les équations (113) et (114) sont souvent connues sous le nom d'équations Foldy-Lax de la fonction de Green.

Résoudre les équations (113) s'annonce très difficile puisque  $\mathbf{T}^{(j)}$ ,  $\mathbf{t}^{(j)}$ , et  $\mathbf{G}_0$  sont tous des opérateurs. Il devient possible de les résoudre pourtant sur la base des ondes multipolaires. On commence par laisser les deux membres de l'équation opérer sur  $\mathbf{G}_0 |\mathbf{J}\rangle$ . Ensuite, on opère sur les deux cotés par  $\mathbf{G}_0$  afin d'obtenir :

$$\mathbf{G}_0 \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{G}_0 |\mathbf{J}\rangle \equiv \mathbf{G}_0 \mathbf{t}^{(j)} \mathbf{G}_0 |\mathbf{J}\rangle + \mathbf{G}_0 \mathbf{t}^{(j)} \mathbf{G}_0 \sum_{l=1, l \neq j}^N \mathbf{T}^{(l)} \mathbf{G}_0 |\mathbf{J}\rangle \quad (115)$$

Si les sources du champ restent à l'extérieur des objets, on peut récrire les équations de l'équation (113) sur la base des ondes multipolaires où elles prennent une forme matricielle. Après un certain nombre de calculs, on trouve que les équations (113) s'écrivent :

$$T^{(j)} J^{(j,0)}_a = t^{(j)} J^{(j,0)}_a + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,0)}_a \quad (116)$$

Les matrices  $H^{(j,l)} \equiv H(k_e(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l))$  sont les matrices de translation irrégulière, et  $J^{(j,0)} \equiv J(k_e \mathbf{x}_j)$  sont les matrices de translation régulières. Ces matrices analytiques sont un peu longues à écrire (voir l'appendice A) mais on peut actuellement les évaluer grâce à des sous-programmes efficaces.

Les « $a$ » sont des matrices colonne contenant les coefficients de l'onde incidente sur la base des ondes multipolaires. Puisque les « $a$ » sont arbitraires, on peut récrire l'équation (116) comme :

$$T^{(j)} J^{(j,0)} = t^{(j)} J^{(j,0)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,0)} \quad (117)$$

Cette équation a le désavantage de dépendre du choix de l'origine du système. On élimine ce problème en multipliant les deux membres de cette équation par les matrices  $J^{(0,j)}$  afin d'obtenir :

$$T^{(j)} = t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,j)} \quad j = 1, \dots, N \quad (118)$$

où nous avons utilisé les propriétés de groupe de la matrice de translation régulière  $J$  :

$$J^{(l,0)} J^{(0,j)} = J^{(l,j)} \quad (119)$$

$$J^{(j,0)} J^{(0,j)} = \mathbb{I} \quad (120)$$

On peut voir l'équation (118) comme une forme des équations de Foldy-Lax dans la représentation multipolaire.

## 8.9 Représentation multipolaire de la diffusion multiple

On peut en principe résoudre directement les équations (118), mais ce n'est pas évident en pratique du fait que les inconnues sont des matrices. Mackowski et Miscenko ont proposé néanmoins une solution de la diffusion multiple qui revient à une solution itérative des équations (118)[37]. Plutôt que de détailler l'obtention des équations (118) pour les  $T^{(j)}$ , à partir des fonctions de Green, on va maintenant les obtenir directement à partir du concept de champ d'excitation et du théorème de translation. Nous verrons que cette démarche nous inspire d'autres manières de résoudre le problème de diffusion multiple.

Le concept d'un champ d'excitation d'un objet est sous-jacent à la dérivation des équations de diffusion multiple de type Foldy-Lax, c'est-à-dire les équations (113) et (114). On part d'abord de l'idée que le

système tout entier, composé de plusieurs objets ou «diffuseurs», est soumis à un champ incident. Le champ d'excitation d'un diffuseur  $j$  du système est la somme du champ incident et du champ diffusé par les autres objets du système, le champ diffusé par l'objet  $j$  étant exclu :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e^{(j)}(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \sum_{l=1, l \neq j}^N \mathbf{E}_s^{(l)}(\mathbf{r}) \\ &= \mathcal{R}g\{\Psi^t(\mathbf{r})\} a + \sum_{l=1, l \neq j}^N \Psi^t(\mathbf{r}_l) f_s^{(l)}\end{aligned}\quad (121)$$

où nous avons développé l'onde diffusée par chaque diffuseur  $\mathbf{E}_s^{(l)}$  en termes d'un développement multipolaire centré sur le centre de la sphère circonscrite du diffuseur  $j$ . Le champ incident,  $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \mathcal{R}g\{\Psi^t(\mathbf{r})\} a$  est ici développé en ondes multipolaires centrées autour de l'origine arbitrairement choisie du système. On remarque que les  $\mathbf{r}_l$  sont définis de  $\mathbf{r}$  par rapport aux centres des sphères circonscrites des objets :

$$\mathbf{r}_l \equiv \mathbf{r} - \mathbf{x}_l \quad (122)$$

Grâce au théorème de translation, on peut récrire ces équations en termes de développements multipolaires

$$\mathbf{E}_e^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \mathcal{R}g\{\Psi^t(\mathbf{r}_j)\} J^{(j,0)} a + \sum_{l=1, l \neq j}^N \mathcal{R}g\{\Psi^t(\mathbf{r}_j)\} H^{(j,l)} f^{(l)} \quad (123)$$

où  $H^{(j,l)} \equiv H(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)$  est la matrice de translation irrégulière (voir l'appendice A). Le champ d'excitation peut toujours être développé sur des coefficients inconnus d'une base d'ondes régulières :

$$\mathbf{E}_e^{(j)}(\mathbf{r}_j) \equiv \mathcal{R}g\{\Psi^t(\mathbf{r}_j)\} e^{(j)} \quad (124)$$

Avec cette définition, on peut éliminer la base des ondes multipolaires et l'on obtient une équation portant sur les coefficients seulement :

$$e^{(j)} = J^{(j,0)} a + \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} f^{(l)}. \quad (125)$$

Invoquant la définition de la matrice  $T$  individuelle pour un diffuseur dans un milieu homogène, c'est-à-dire l'équation (53),

$$f^{(l)} = t^{(l)} e^{(l)} \quad (126)$$

on obtient un ensemble de  $N$  équations couplées où les matrices colonnes  $e^{(j)}$  sont les inconnues :

$$e^{(j)} = J^{(j,0)} a + \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} e^{(l)} \quad j = 1, \dots, N \quad (127)$$

On regarde les équations (127) et (126) comme les équations fondamentales de la diffusion multiple multipolaire. On peut voir ces équations, comme les équations de Foldy-Lax de base. Si l'on veut construire une solution de la diffusion multiple pour un champ incident donné, il suffit souvent de simplement résoudre ce système par itération. A partir de ces formules, on peut obtenir toutes les formulations des solutions de la diffusion multiple.

Si l'onde incidente est une onde plane, les équations (127) sont particulièrement faciles à résoudre puisque « $J^{(j,0)} a$ » se remplace analytiquement par « $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j) a$ » dans ce cas :

$$e^{(j)} = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j) a + \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} e^{(l)} \quad j = 1, \dots, N \quad (128)$$

A condition que les objets ne soient pas trop grands par rapports à la longueur d'onde, on peut traiter des agrégats composés de centaines de sphères en simplement trouvant la solution des ces équations couplées.

### 8.9.1 Equations de Foldy-Lax de la diffusion multiple

Une solution des équations (127) ne constitue pas une solution complète du problème dans le sens que si on change l'onde incidente, il faut résoudre de nouveau le système d'équation (127) avec d'autres coefficients « $a$ » du champ incident sur le système. Dans certaines applications, on peut vouloir obtenir des matrices- $T$  à diffusion multiple du système tout entier. L'équation (127) peut servir à dériver toutes les formulations de matrice- $T$  à diffusion multiple que j'ai vues dans la littérature.

Comme premier exemple, on va établir l'équation (118) en multipliant les deux membres de l'équation (127) par des matrices  $t^{(j)}$  individuelles afin d'obtenir :

$$f^{(j)} = t^{(j)} J^{(j,0)} a + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} f^{(l)} \quad (129)$$

où nous avons utilisé sur le membre de gauche, la relation  $f^{(j)} = t^{(j)} e^{(j)}$ . Ensuite, on définit  $T^{(j)}$  par la relation :

$$f^{(j)} \equiv T^{(j)} J^{(j,0)} a \quad (130)$$

où l'on remarque que grâce à la présence de la matrice  $J^{(j,0)}$ , la matrice  $T^{(j)}$  est indépendante du choix de l'origine arbitraire du système. Insérant cette relation dans l'équation (129), on obtient :

$$T^{(j)} J^{(j,0)} a = t^{(j)} J^{(j,0)} a + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,0)} a \quad (131)$$

Puisque la matrice  $a$  des coefficients de l'onde incidente est arbitraire, on obtient :

$$T^{(j)} J^{(j,0)} = t^{(j)} J^{(j,0)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,0)} \quad (132)$$

Multipliant les deux cotés de cette équation par  $J^{(0,j)}$  et en utilisant les propriétés de groupe des  $J^{(0,j)}$  (voir les éqs.(119)-(120)) on obtient :

$$T^{(j)} = t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l)} J^{(l,j)} \quad (133)$$

qui est le même système d'équations correspondant aux équations de Foldy-Lax, éq.(118).

### 8.9.2 Solution de la diffusion multiple par inversion directe

Une autre solution semi-analytique de la diffusion multiple est de résoudre l'ensemble des équations (127) sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} e^{(1)} \\ e^{(2)} \\ \vdots \\ e^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -H^{(1,2)} t^{(2)} & \dots & -H^{(1,N)} t^{(N)} \\ -H^{(2,1)} t^{(1)} & \mathbb{I} & \dots & -H^{(2,N)} t^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H^{(N,1)} t^{(1)} & -H^{(N,2)} t^{(2)} & \dots & \mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J^{(1,0)} a \\ J^{(2,0)} a \\ \vdots \\ J^{(N,0)} a \end{bmatrix} \quad (134)$$

où  $\mathbb{I}$  dénote la matrice d'identité. On peut obtenir une expression pour les coefficients de diffusion  $f^{(j)}$  en multipliant les deux côtés de cette équation par une matrice diagonale par blocs où les matrices sur la diagonale sont des matrices  $t^{(j)}$  d'objets isolés :

$$\begin{bmatrix} t^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{(N)} \end{bmatrix} \quad (135)$$

Après cette multiplication, l'éq.(134) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(N)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T^{(1,1)} & T^{(1,2)} & \dots & T^{(1,N)} \\ T^{(2,1)} & T^{(2,2)} & \dots & T^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{(N,1)} & T^{(N,2)} & \dots & T^{(N,N)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{(1,0)} a \\ J^{(2,0)} a \\ \vdots \\ J^{(N,0)} a \end{bmatrix} \quad (136)$$

où nous avons utilisée l'éq.(126) sur le membre de gauche de l'équation. Sur le membre de droite de l'équation nous avons définie les  $N \times N$  blocs  $T^{(j,k)}$  :

$$\begin{bmatrix} T^{(1,1)} & T^{(1,2)} & \dots & T^{(1,N)} \\ T^{(2,1)} & T^{(2,2)} & \dots & T^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{(N,1)} & T^{(N,2)} & \dots & T^{(N,N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t^{(N)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{I} & -H^{(1,2)} t^{(2)} & \dots & -H^{(1,N)} t^{(N)} \\ -H^{(2,1)} t^{(1)} & \mathbb{I} & \dots & -H^{(2,N)} t^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H^{(N,1)} t^{(1)} & -H^{(N,2)} t^{(2)} & \dots & \mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1}$$

On peut écrire l'équation (136) de façon compacte comme  $N$  équations matricielles :

$$f^{(j)} = \sum_{k=1}^N T^{(j,k)} J^{(k,0)} a \quad j = 1, \dots, N \quad (137)$$

Nous avons donc présenté deux types de matrices- $T$  qui nous permettent d'obtenir les coefficients  $f^{(j)}$  : soit à partir de l'éq.(137) en utilisant les matrices  $T^{(j,k)}$ , soit à partir des matrices  $T_N^{(j)}$  :

$$f^{(j)} \equiv T^{(j)} J^{(j,0)} a \quad (138)$$

Une comparaison des équations (137) et (138) nous permet d'obtenir la matrice  $T^{(j)}$  en fonction des  $T^{(j,k)}$  :

$$T^{(j)} = \sum_{k=1}^N T^{(j,k)} J^{(k,j)} \quad (139)$$

On remarque néanmoins qu'il faut  $N$  matrices  $T^{(j,k)}$  afin de construire une seule matrice  $T^{(j)}$ .

### 8.9.3 Troncature de la base des ondes partielles

Les matrices  $T^{(j)}$  et  $T^{(j,k)}$  sont toutes les deux des solutions complètes de l'équation de diffusion multiple. Néanmoins, formellement ces deux matrices sont de dimension infinie. Un calcul numérique de ces matrices doit forcément s'effectuer dans un espace tronqué. Les différents algorithmes de calcul que nous avons développés pour calculer les matrices  $T^{(j,k)}$  sont numériquement stables puisqu'ils profitent de la troncature naturelle du problème lié à la taille finie des diffuseurs.

La troncature naturelle vient du fait que les matrices  $t^{(j)}$  des diffuseurs isolés ne peuvent interagir qu'avec un nombre limité d'ondes multipolaires. En général, les éléments non-négligeables, d'une matrice  $t^{(j)}$  sont contenus dans une matrice carrée contenant les premiers  $n \lesssim k_e R^{(j)} + 3$  ordres multipolaires où  $R^{(j)}$  est le rayon de la sphère circonscrite qui entoure chaque diffuseur. On peut montrer que toutes les matrices  $T^{(j,k)}$  sont naturellement tronquées au même ordre multipolaire que les matrices  $t^{(j)}$  (sur la gauche) et  $t^{(k)}$  (sur la droite) des objets individuels. Cette troncature naturelle des matrices  $T^{(j,k)}$  est particulièrement facile à démontrer dans un formalisme itératif comme illustré dans la section 9.2 ci-dessous. Néanmoins, il faut parfois agrandir la dimension de l'espace tronqué à des ordres multipolaires plus élevés si les objets sont fortement couplés, lors de l'excitation de plasmons par exemple.

Dans la littérature, certains auteurs préfèrent utiliser les algorithmes de calcul des  $N$  matrices  $T^{(j)}$  plutôt que de calculer les  $N^2$  matrices  $T^{(j,k)}$ . La difficulté est que les algorithmes de calcul pour les  $T^{(j)}$  sont susceptibles d'entraîner des erreurs numériques, ce qui ressort de l'équation (139). Les matrices  $T^{(j,k)}$  sont naturellement tronquées (voir section 9.2), mais les matrices  $J^{(k,j)}$  opèrent en principe sur



un espace de dimension infinie et le fait de les tronquer dans un quelconque algorithme peut introduire des erreurs considérables. Certains algorithmes de calcul des matrices  $T^{(j)}$  peuvent réussir parce que les matrices  $J^{(k,j)} = J(k_e(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j))$  peuvent en réalité être tronquées à des ordres multipolaires de l'ordre de  $n \lesssim k_e 2R_{\text{synt}}$  où  $R_{\text{synt}}$  est le rayon de la sphère circonscrite qui entoure le système tout entier. Néanmoins, le fait d'être obligé d'étendre la dimension de l'espace multipolaire à de telles dimensions nuit à l'utilité de ces algorithmes pour des systèmes de grande taille et rend certains algorithmes inutilisables, comme les algorithmes récursifs.

## 8.10 Forces optiques directes et induites

La manipulation mécanique d'atomes, molécules, et petits objets micrométriques en n'utilisant que la lumière est devenu monnaie courante dans de nombreux laboratoires à travers le monde. En dépit du fait qu'il s'agit de physique «classique», il existe bien des controverses au sujet de la formulation de la force optique sur une particule immergée dans un milieu diélectrique. Dans cette section, on essaie d'éclairer un peu ce débat en établissant l'expression du tenseur de contrainte d'un point de vue «microscopique».

### 8.10.1 Forces optiques et débat Minkowski - Abrahams

Pour un objet dans le vide, on définit la force électromagnétique ou simplement la force optique comme la force de Lorentz sur les charges de polarisation et les courants de polarisation dans l'objet qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}\rho_{\text{pol}} &= \epsilon_0 \text{div } \mathbf{E} \\ \mathbf{J}_{\text{pol}} &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (140)$$

$$\mathbf{F}_o = \int_V d\mathbf{x} (\mathbf{E} \rho_{\text{pol}} + \mathbf{J}_{\text{pol}} \wedge \mathbf{B}) \quad (141)$$

où  $V$  est un volume qui contient l'objet. Après des manipulations sur les équations de Maxwell, on obtient :

$$\mathbf{F}_o + \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{champ}} = \oint_{\Gamma} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad (142)$$

où  $\mathbf{F}_o$  est la force mécanique et  $\Gamma$  la surface du volume  $V$ . Le tenseur de contrainte de Maxwell,  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ , dans l'équation (142) s'écrit :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) \quad (143)$$

qui correspond au flux de quantité du mouvement à travers la surface  $\Gamma$ . Dans l'équation (142), on peut interpréter  $\mathbf{p}_{\text{champ}}$  comme la quantité de mouvement du champ dans le volume d'intégration  $V$  :

$$\mathbf{p}_{\text{champ}} = \epsilon_0 \int_V (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) d\mathbf{x} \quad (144)$$

donc la densité de la quantité du mouvement électromagnétique du champ électromagnétique,  $\mathbf{g}_c$ , est :

$$\mathbf{g}_c = \epsilon_0 (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}} \quad (145)$$

Les difficultés commencent quand il faut déterminer la force optique sur un objet immergé dans un milieu diélectrique. Les choses se compliquent puisque sous l'action de l'onde, une quantité de mouvement est acquise par les électrons des dipôles moléculaires. Ces contributions moléculaires exerceront également des forces mécaniques sur l'objet.

Il semble néanmoins qu'on puisse faire des approximations raisonnables de la force optique si le milieu ambiant est transparent. Cette condition se traduit par le fait que les molécules dans un milieu transparent oscillent essentiellement en accord de phase avec l'onde incidente ce qui veut dire que la permittivité et la perméabilité relatives du milieu sont réels en première approximation. Quand cette condition est remplie, il semble qu'on puisse généraliser le tenseur de Maxwell au cas du milieu diélectrique liquide et transparent.

L'idée essentielle est que la force optique, à l'échelle de l'observation au moins, n'agit que sur les charges et courants de polarisation du milieu qui ne seraient pas présents si l'objet était remplacé par le milieu ambiant. Quand cette hypothèse de base est correcte à l'échelle microscopique, on peut écrire la force mécanique sur l'objet,  $\mathbf{F}_o$ , comme :

$$\mathbf{F}_o = \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{E}\rho'_{\text{pol}} + (\mathbf{J}'_{\text{pol}} + \mathbf{J}'_{\text{mag}}) \wedge \mathbf{B}) \quad (146)$$

où  $V$  est un volume qui contient l'objet et les primes signifient qu'il s'agit des charges et courants induits par la présence de l'objet à la place du milieu diélectrique ambiant.

Cette formulation de la force est analogue à la force d'Archimède. Pour un objet immergé dans un milieu liquide, la force de gravitation agit sur l'objet mais elle agit également sur l'eau. En conséquence, il y a également des forces moléculaires de l'eau qui agissent sur l'objet. La force mécanique totale sur l'objet est  $\mathbf{F}_t = (m_{\text{obj}} - m_{\text{eau}}) \mathbf{g}$  où  $m_{\text{eau}}$  est la masse de l'eau déplacée par l'objet. Autrement dit, la force mécanique totale n'est que la force de gravitation agissant sur la masse supplémentaire qui est présente parce que l'objet remplace l'eau. Dans ce langage, la force de l'éq.(146) est la force sur les charges et courants de polarisation présents qui ne seraient pas là si l'objet était absent.

On commence avec des formules «microscopiques» de Maxwell sans sources :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{pol}} \quad (147)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{pol}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} \quad (148)$$

où les densités et courants viennent des charges et courants de polarisation des milieux matériels. On fait l'hypothèse que les objets sont entièrement décrits par leurs densités de moment dipolaire électrique  $\mathbf{P}_s$  et de moment dipolaire magnétique  $\mathbf{M}_s$ , où l'indice «s» indique qu'il s'agit du diffuseur, «scatterer». De même, le milieu externe est décrit par les densités  $\mathbf{P}_e$  et  $\mathbf{M}_e$ .

L'objectif principal est d'écrire  $\mathbf{F}_o$  entièrement en fonction des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}_e$ , et  $\mathbf{H}_e$ . Si de plus, le milieu externe est non-absorbant, on peut écrire la force sur l'objet comme :

$$\mathbf{F}_o = \int_V \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} d\mathbf{x} - \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{champ}} + \mathbf{p}_{\text{milieu}}) \quad (149)$$

où  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$  est un tenseur de contrainte, et où  $\mathbf{p}_{\text{champ}}$  et  $\mathbf{p}_{\text{milieu}}$  représentent respectivement la quantité de mouvement du champ et la quantité du mouvement associée avec les polarisations du milieu externe dans le volume  $V$  d'intégration.

L'objectif est maintenant de montrer qu'on peut obtenir une relation du style de l'équation (149). On peut récrire l'équation (148) comme :

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} + \mathbf{J}_{\text{mag}} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (150)$$

où les densités de charge et de courant ont les descriptions microscopiques habituelles :

$$\mathbf{J}_{\text{pol}} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_s \quad (151)$$

$$\mathbf{J}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}_s \quad (152)$$

Les relations avec les  $\mathbf{J}'_{\text{pol}}$  et  $\mathbf{J}'_{\text{mag}}$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{pol}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P}_s - \mathbf{P}_e) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_e = \mathbf{J}'_{\text{pol}} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_e \\ \mathbf{J}_{\text{mag}}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times (\mathbf{M}_s - \mathbf{M}_e) + \nabla \times \mathbf{M}_e = \mathbf{J}'_{\text{mag}} + \nabla \times \mathbf{M}_e \end{aligned} \quad (153)$$

d'où l'on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'_{\text{pol}} + \mathbf{J}'_{\text{mag}} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e) + \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}_e \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_e + \nabla \times \mathbf{H}_e \end{aligned} \quad (154)$$

Dans l'équation (154) nous avons fait appel aux champs «macroscopiques» du milieu externe :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_e &\equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}_e = \frac{\mathbf{B}}{\mu_e \mu_0} \\ \mathbf{D}_e &\equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E}\end{aligned}\quad (155)$$

Les charges de polarisation s'écrivent :

$$\rho_{\text{pol}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (156)$$

La description microscopique des charges de polarisation est :

$$\begin{aligned}\rho_{\text{pol}} &= -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_e) - \nabla \cdot \mathbf{P}_e \\ &= \rho'_{\text{pol}} - \nabla \cdot \mathbf{P}_e\end{aligned}\quad (157)$$

On obtient donc :

$$\rho'_{\text{pol}} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e) = \nabla \cdot \mathbf{D}_e \quad (158)$$

Grâce aux équations (154) et (158), la force optique s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_o &= \int_V d\mathbf{x} [\mathbf{E} \rho'_{\text{pol}} + (\mathbf{J}'_{\text{pol}} + \mathbf{J}'_{\text{mag}}) \wedge \mathbf{B}] \\ &= \int_V d\mathbf{x} \left[ \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{D}_e - \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_e \right) \wedge \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{H}_e) \wedge \mathbf{B} \right]\end{aligned}\quad (159)$$

On peut en principe calculer la force optique avec cette relation volumique. On peut manipuler cette équation et l'amener à la forme de l'équation (149) à condition que les paramètres constitutifs,  $\epsilon_e$  et  $\mu_e$  soient réels, autrement dit que les champs  $\mathbf{D}_e$  et  $\mathbf{H}_e$  ne soit pas déphasés par rapport aux champs  $\mathbf{E}_e$  et  $\mathbf{B}_e$ . Sous cette condition, on peut écrire :

$$\mathbf{F}_o = \int_V d\mathbf{x} \left[ \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_e \mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \epsilon_0 \epsilon_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \wedge \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_e \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \right] \quad (160)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Utilisant la relation :

$$\epsilon_0 \epsilon_e \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \epsilon_0 \epsilon_e \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \wedge \mathbf{B} + \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E} \wedge \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) \quad (161)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_o &= \int_V d\mathbf{r} \left( \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_e \mu_0} \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E} \wedge (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_e \mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} \right) \\ &\quad - \epsilon_0 \epsilon_e \int_V d\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})\end{aligned}\quad (162)$$

où nous avons utilisé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (163)$$

Utilisant la formule :

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \wedge (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (164)$$

nous avons les relations :

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \wedge (\nabla \times \mathbf{E}) &= \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ (\nabla \times \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} &= -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}\end{aligned}\quad (165)$$

$$\mathbf{F}_o = \int_V d\mathbf{x} \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} - \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{g}_e d\mathbf{x} \quad (166)$$

où le tenseur de contrainte s'écrit :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_{ij} = \epsilon_0 \epsilon_e E_i E_j + \frac{1}{\mu_e \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon_0 \epsilon_e \mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_e \mu_0} \right) \quad (167)$$

et  $\mathbf{g}_e$  est la densité de quantité du mouvement du champ plus la quantité de mouvement des dipôles moléculaires du milieu externe :

$$\mathbf{g}_e = \epsilon_0 \epsilon_e (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_e \mu_e (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_e) = \frac{1}{v_e^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_e = \frac{\mathbf{S}_e}{v_e^2} \quad (168)$$

Cette relation connue comme relation de Minkowski pour la densité de quantité de mouvement a fait couler beaucoup d'encre. On remarque que  $\mathbf{S}_e$  est le flux d'énergie dans le milieu externe (même si  $\mu_e \neq 1$ ). La quantité  $\mathbf{g}_e$  est une densité de la quantité du mouvement. On obtient le flux de la quantité de mouvement en multipliant  $\mathbf{g}_e$  par la vitesse de la lumière dans le milieu,  $v_e$ . On obtient donc que le flux d'énergie égale  $v_e$  fois le flux de la quantité de mouvement. Dans le langage moderne, on aime parler des photons, et le flux de la «pseudo» quantité de mouvement satisfait  $\frac{|\mathbf{S}_e|}{v_e} = N_{\text{photon}} \tilde{p}$ , où  $N_{\text{photon}}$  est le nombre de photons et  $\tilde{p}$  leur «pseudo» quantité du mouvement. Le flux d'énergie satisfait  $I = |\mathbf{S}_e| = N_{\text{photon}} \tilde{E}$  où  $\tilde{E}$  est la «pseudo» énergie des photons. On obtient donc une relation entre la «pseudo» quantité de mouvement,  $\tilde{p}$ , et la «pseudo» énergie,  $\tilde{E}$ , des photons :

$$\tilde{E} = v_e p = \frac{c}{n_e} \tilde{p} \quad (169)$$

Les mots «pseudo» sont utilisés puisque  $\tilde{E}$  et  $\tilde{p}$  contiennent des contributions venant du milieu externe.

La controverse autour de ce sujet est due largement au fait qu'Abrahams et d'autres auteurs ont souligné que la «vraie» densité de quantité de mouvement du champ est,  $\mathbf{g}_c = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}}$ , comme donnée par un traitement du tenseur de Maxwell dans le vide (voir l'éq.(145)). Si maintenant, on essayait d'obtenir le flux de la nouvelle quantité de mouvement du photon dans le milieu en multipliant  $\mathbf{g}_c$  par  $v_e$ , on obtiendrait que flux de la quantité de mouvement soit,  $\frac{v_e}{c^2} |\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}}|$ . Puisque le flux d'énergie du champ est  $|\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}}|$ , on arriverait à la conclusion que les photons obéissent à la relation  $E = n_e c p$ , cette fois-ci avec le facteur  $n_e$  dans le numérateur contrairement à l'équation (169). Une telle interprétation de la relation d'Abrahams n'est pourtant pas correcte puisqu'on n'a pas le droit de multiplier une densité de quantité de mouvement exclusivement du champ,  $\mathbf{g}_c$ , par une vitesse de phase  $v_e = c/n_e$  qui inclut les effets du milieu. La vitesse du champ «pur» est toujours  $c$ . Le «ralentissement» de la vitesse de la lumière dans le milieu est un effet apparent du aux rayonnements moléculaires.

En conséquence, si l'on veut adopter le point de vue d'Abrahams, le flux de la «vraie» quantité de mouvement est obtenu en multipliant  $\mathbf{g}_c$  par la vraie vitesse du champ  $c$ , et la quantité de mouvement des photons est donnée par  $N_{\text{photon}} p = |c \mathbf{g}_c|$ . Vu du fait que le «vrai» flux d'énergie est  $|\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}_{\text{vide}}| = N_{\text{photon}} E$ , on obtient que les photons satisfont la relation :

$$E = c p \quad (170)$$

Les partisans d'Abrahams ont raison en ce qui concerne strictement l'énergie et la quantité du mouvement du champ. Néanmoins, c'est la quantité de mouvement du champ plus la quantité de mouvement moléculaire de la forme de Minkowski, (l'éq.(168)) qui donne la force optique *effective* qui agit sur l'objet.

### 8.10.2 Formulation harmonique du tenseur de Maxwell

Avec un traitement habituel, on trouve à partir des éqs.(166)-(168), que la force optique d'un champ harmonique moyennée sur une période dans le temps est donnée par un tenseur de Maxwell «harmonique»,  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_h$  :

$$\langle \mathbf{F}_o \rangle_T = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}}_h \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (171)$$

où  $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_h$  est le tenseur de Maxwell moyenné dans le temps :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}_h = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \epsilon_0 \epsilon_e E_i^* E_j + \frac{1}{\mu_e \mu_0} B_i^* B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon_0 \epsilon_e \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu_e \mu_0} \right) \right\} \quad (172)$$

Le débat d'Abrahams-Minkowski disparaît dans le cas harmonique puisque la moyenne temporelle des termes concernés disparaît pour des champs harmoniques :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) \right\rangle_T = \left\langle \frac{d}{dt} \int_V d\mathbf{r} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \right\rangle_T = 0 \quad (173)$$

Aussi longtemps que le milieu externe reste non-absorbant et qu'on évalue le tenseur de Maxwell sur une surface qui entoure l'objet, on n'aura pas de problèmes. Néanmoins, si l'on s'intéressait à ce qui se passe à l'intérieur de l'objet diélectrique, ce serait une erreur de penser qu'il faut évaluer le tenseur de Maxwell en remplaçant  $\varepsilon_e$  et  $\mu_e$  par les constantes  $\varepsilon_s$  et  $\mu_s$  de l'objet. Dans le calcul microscopique, il est explicite qu'il faut garder la forme de l'éq.(167) ou (172) du tenseur de Maxwell avec les constantes  $\varepsilon_e$  et  $\mu_e$ , même à l'intérieur de l'objet. De plus, il ne faut pas oublier que le tenseur de Maxwell ne pouvait être obtenu que dans le cas d'un milieu externe non-absorbant, c'est-à-dire que  $\varepsilon_e$  et  $\mu_e$  sont réels.

La discussion du paragraphe précédent peut sembler inutile, mais plusieurs résultats faux sont apparus récemment, y compris encore cette année, où des erreurs sur la force de radiation agissant sur les charges de polarisation à une interface étaient dues au fait que le tenseur de Maxwell pris à l'intérieur du milieu était incorrect.

### 8.10.3 Sections efficaces pour la force de radiation

Il est souhaitable de traduire les résultats d'un calcul du tenseur de Maxwell sous une forme qui soit plus pratique pour les comparaisons avec expérience. Afin de s'affranchir de la dépendance sur l'irradiance des champs, il est pratique, pour des faisceaux homogènes, de définir une section efficace «vectorielle»,  $\sigma_f$ , telle que :

$$\mathbf{F}_o \equiv \frac{I}{v_e} \sigma_f \quad (174)$$

où  $I = |\mathbf{S}_i|$  est l'irradiance et  $v_e$  la vitesse de phase de l'onde dans le milieu  $v_e = c/n_e = \sqrt{\varepsilon_e \mu_e \varepsilon_0 \mu_0}^{-1}$ .

Souvent dans les expériences de force optique, le faisceau est inhomogène (faisceau laser par exemple). Si l'homogénéité du champ varie lentement par rapport à la taille de l'objet, on peut simplement écrire :

$$\mathbf{F}_o \simeq \frac{I(\mathbf{r})}{v_e} \sigma_f \quad (175)$$

Pour une pincette optique, la variation spatiale du faisceau n'est souvent pas négligeable à l'échelle de l'objet et cette approximation n'est plus valable. Dans de telles situations, on peut généraliser la section efficace afin qu'elle dépende de la position de la particule :

$$\mathbf{F}_o \equiv \frac{I(\mathbf{0})}{v_e} \sigma_f(\mathbf{r}) \quad (176)$$

où  $I(\mathbf{0})$  est l'irradiance à un certain point judicieusement choisi du faisceau (choisi comme origine).

La difficulté avec cette formulation est que l'irradiance pour une position donnée d'une pincette optique est difficilement mesurable. Pour les faisceaux inhomogènes, la puissance du faisceau incidente,  $P_1$ , est la donnée expérimentale. Il est donc plus utile de formuler la force en fonction d'une efficacité  $\mathbf{Q}_f$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o &= \frac{P_1}{v_e} \frac{k^2 \varphi}{\pi} \sigma_f(\mathbf{r}) \\ &\equiv \frac{P_1}{v_e} \mathbf{Q}_f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (177)$$

où  $\mathbf{Q}_f(\mathbf{r})$  est une quantité sans dimensions. Le facteur  $\varphi$  que nous appelons la «*shape normalization parameter*» dépend de la forme du faisceau et est déterminé par la relation entre  $I(\mathbf{0})$  et la puissance totale du faisceau :

$$I(\mathbf{0}) \equiv \varphi \frac{k^2 P_1}{\pi} \quad (178)$$

On détermine le facteur  $\varphi$  en intégrant le faisceau modèle afin de déterminer sa puissance totale. Pour un faisceau axisymétrique par exemple, la puissance du faisceau est donnée par l'intégrale :

$$P_1 = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^\infty I(\mathbf{r}) k \rho(k d \rho) \Big|_{z=\text{cte}} \quad (179)$$

où l'irradiance  $I(\mathbf{r})$  est donnée par :

$$I(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \} \cdot \hat{\mathbf{z}} \quad (180)$$

et  $z$  est l'axe de symétrie du faisceau. Une comparaison avec l'éq.(178) montre que  $\varphi$  est donné par :

$$\varphi = \left( 2 \int_0^\infty \frac{I(\mathbf{r})}{I(\mathbf{0})} k \rho(k d \rho) \Big|_{z=\text{cte}} \right)^{-1} \quad (181)$$

On obtient une formule pour  $\sigma_f$  en choisissant comme surface fermée dans l'éq.(171) une sphère à l'infini, invoquant les limites du champ lointain et comparant le résultat du calcul avec l'équation (177). On obtient que  $\sigma_f$  s'exprime par :

$$\sigma_f = \sigma_r - \sigma_a \quad (182)$$

où  $\sigma_a$  caractérise la contribution de la force due aux asymétries dans la diffusion par la particule :

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{v_e}{4I(\mathbf{0})} \int \hat{\mathbf{r}} \left\{ \varepsilon_e \epsilon_0 \mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{E}_s + \frac{1}{\mu_e \mu_0} \mathbf{B}_s^* \cdot \mathbf{B}_s \right\} d\Omega_r \\ &\underset{r \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2I(\mathbf{0})} r^2 \left( \frac{\varepsilon_e \epsilon_0}{\mu_e \mu_0} \right)^{1/2} \int \hat{\mathbf{r}} \mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{E}_s d\Omega_r \end{aligned} \quad (183)$$

Nous avons éliminé le champ magnétique de l'expression en utilisant l'identité vectorielle  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ , et utilisé le comportement du champ lointain  $\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_s = 0$ ; nous avons en outre utilisé la relation [40] :

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{=} (\varepsilon_e \epsilon_0 \mu_e \mu_0)^{1/2} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_s \quad (184)$$

L'autre contribution à la force optique  $\sigma_r$  correspond au flux de la quantité de mouvement prélevé au champ incident :

$$\begin{aligned} \sigma_r &\underset{r \rightarrow \infty}{=} -\frac{v_e}{4I(\mathbf{0})} r^2 \left\{ \varepsilon_e \epsilon_0 \int \hat{\mathbf{r}} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{exc}}^* \cdot \mathbf{E}_s \} d\Omega_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_e \mu_0} \int \hat{\mathbf{r}} \operatorname{Re} \{ \mathbf{B}_s^* \cdot \mathbf{B}_{\text{exc}} + \mathbf{B}_{\text{exc}}^* \cdot \mathbf{B}_s \} d\Omega_r \right\} \\ &= -\frac{1}{2I(\mathbf{0})} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \left( \frac{\varepsilon_e \epsilon_0}{\mu_e \mu_0} \right)^{1/2} \int \hat{\mathbf{r}} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{exc}}^* \cdot \mathbf{E}_s \} d\Omega_r \end{aligned} \quad (185)$$

où nous avons de nouveau éliminé le champ magnétique en employant les mêmes techniques décrites après l'éq.(183) et utilisant  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{B}_e(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{=} (\varepsilon_e \epsilon_0 \mu_e \mu_0)^{1/2} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_e$ .

## 9 Quelques résultats des travaux récents

Après avoir mis au point des techniques numériquement stables de calcul de diffusion multiple de sphères isotropes dans les années 1999-2000, j'ai travaillé à étendre ces techniques de calcul aux systèmes composés d'objets de composition plus compliquée. Notamment, j'ai mis au point des techniques de calcul des matrices- $T$  de sphères enrobées concentriques et non-concentriques et ainsi que des matrices- $T$  de sphères avec des inclusions sphériques.

La matrice- $T$  d'un système composé d'un grand nombre d'objets contient une grande quantité d'information. Un autre axe de travail consiste à en extraire l'information qui nous intéresse. Parmi les différents types d'information que nous avons pu extraire, on trouve les matrices de diffusion ainsi que les sections efficaces totales et différentielles de diffusion. Pour des systèmes de géométrie aléatoire, les sections efficaces moyennées sur les orientations sont souvent plus significatives qu'une section efficace dans une orientation donnée. D'autres informations d'intérêt que nous avons explorées sont les sections efficaces d'absorption des objets individuels, et les forces optiques sur les différents objets du système.

Mes études les plus récentes concernent l'élaboration de nouvelles théories différentielles pour le calcul des matrices- $T$  d'objets de forme non-sphériques et composés de matériaux isotropes ou anisotropes. Bien

que plusieurs techniques de calcul de matrice- $T$  pour des objets tridimensionnels existent déjà, elles sont souvent limitées par la taille et/ou la non-sphéricité des objets qu'elles peuvent décrire. L'espoir est que ces nouvelles techniques qui exploitent les récents progrès dans la théorie des réseaux de diffraction ( FFF ou «Fast Fourier Factorization» et algorithmes de propagation de la matrice- $S$  ) puissent étendre le domaine de tels calculs. Mes derniers travaux dans ce domaine consistent en une technique et un code de calcul pour la matrice- $T$  de sphères composées d'un matériau anisotrope. Une formulation théorique pour les objets de forme non-sphérique est déjà terminée, et la programmation est commencée.

### 9.1 Solutions récursives de la matrice $T$ à diffusion multiple

La solution récursive des  $T^{(j,k)}$  par inversion d'une matrice de dimension  $N^2 \times 2p_{\max} \times 2p_{\max}$  rencontre souvent des problèmes d'inversion. Rien n'empêche de résoudre les  $N$  équations donnant les matrices  $T^{(j)}$ , mais ces matrices ne sont pas carrées mais de dimension  $2p_{\max} \times 2p'_{\max}$ . La taille de  $p'_{\max}$  est relativement mal contrôlée et de l'ordre de  $p'_{\max} = [n'_{\max} (n'_{\max} + 1)]$  avec  $n'_{\max} \simeq kD_{\text{syst}}$  où  $D_{\text{syst}}$  est de l'ordre de la taille (diamètre) du système. Cette technique nécessite donc de calculer des ordres multipolaires élevés quand le système devient grand.

Afin de tenter de palier ces difficultés Chew[36] et d'autres auteurs[38] ont développé une méthode récursive pour calculer les  $T^{(j)}$  dans les années 1990. L'idée est qu'on peut construire les matrices  $T_N^{(j)}$  pour un système à  $N$ -objets à partir des matrices  $T_{N-1}^{(j)}$ . Chaque addition d'un objet serait accompagnée par une inversion de matrice décrivant un seul diffuseur et non pas tous les  $N$  objets à la fois. Commencant la méthode avec un seul objet, on répète le procédé jusqu'au nombre d'objets voulu.

Certains chercheurs qui ont tenté d'utiliser la formulation formellement correcte de Chew ont rapidement découvert de grandes instabilités numériques. Ils ont publié leurs difficultés dans le journal du IEEE en 2000, et il est maintenant «bien connu» que la méthode récursive «ne marche pas» pour résoudre les équations de diffusion multiple[39].

De notre côté, nous avons rencontré les mêmes problèmes en 1999 et développé une formulation récursive parfaitement stable basée sur les matrices- $T$  en paires du système,  $T_N^{(k,j)}$ . Avant d'entamer le procédé récursif, il faut calculer les  $N$  matrices- $T$  de chacun des objets isolés,  $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(N)}$ . Dans la majorité des applications que nous avons traitées jusqu'ici, nous avons adopté le choix particulièrement simples des sphères isotropes puisque les matrices  $t^{(j)}$  sont diagonales et particulièrement simples à calculer dans ce cas.

Notre procédé pour calculer les  $T_N^{(j,k)}$  est d'ajouter les diffuseurs au système un à un dans un ordre arbitraire, en calculant les matrices  $T_N^{(j,k)}$  à chaque étape. Si l'on a les matrices  $T_{N-1}^{(k,j)}$  pour un système contenant  $N-1$  objets, on peut calculer la matrice  $T_N^{(N,N)}$  du  $N^e$  objet ajouté au système en effectuant une inversion de matrice effectuée dans un espace d'ondes partielles décrivant une seule particule [15, 20] :

$$T_N^{(N,N)} = t^{(N)} \left[ \mathbb{I} - \sum_{j,k=1}^{N-1} H^{(N,k)} T_{N-1}^{(k,j)} H^{(j,N)} t^{(N)} \right]^{-1} \quad (186)$$

En général, la matrice qu'il faut inverser est de dimension  $2p_{\max} \times 2p_{\max}$ . Une fois que nous avons la matrice  $T_N^{(N,N)}$ , nous pouvons obtenir les matrices  $T_N^{(N,k)}$  et  $T_N^{(j,N)}$  par multiplications matricielles :

$$T_N^{(N,k)} = T_N^{(N,N)} \sum_{i=1}^{N-1} H^{(N,i)} T_{N-1}^{(i,k)} \quad k \neq N \quad (187)$$

$$T_N^{(j,N)} = \sum_{i=1}^{N-1} T_{N-1}^{(j,i)} H^{(i,N)} T_N^{(N,N)} \quad j \neq N \quad (188)$$

On peut également modifier les matrices  $T_{N-1}^{(j,k)}$  ; avec  $j \neq N, k \neq N$  afin qu'elles tiennent compte de la présence de la particule  $N$  :

$$T_N^{(j,k)} = T_{N-1}^{(j,k)} + \sum_{i=1}^{N-1} T_{N-1}^{(j,i)} H^{(i,N)} T_N^{(N,k)} \quad j, k \neq N \quad (189)$$

Nous avons vérifié et utilisé notre méthode par de nombreuses études (refs : [2], [10]-[13] et [17]-[18]).

## 9.2 Solutions itératives de la matrice- $T$ à diffusion multiple

On peut également montrer que les matrices  $T^{(j,k)}$  doivent satisfaire les  $N^2$  conditions[16] :

$$\begin{aligned} T^{(j,k)} &= t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l,k)} & j \neq k \\ T^{(j,j)} &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T^{(l,j)} \end{aligned} \quad (190)$$

Si on désigne par l'indice  $q$  un ordre d'itération, on peut formuler ces équations comme une solution itérative :

$$\begin{aligned} T_q^{(j,k)} &= t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T_{q-1}^{(l,k)} & j \neq k \\ T_q^{(j,j)} &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l=1, l \neq j}^N H^{(j,l)} T_{q-1}^{(l,j)} \end{aligned} \quad (191)$$

où on initialise l'itération avec :

$$\begin{aligned} T_0^{(j,k)} &= t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)} & j \neq k & \quad j, k = 1, \dots, N \\ T_0^{(j,j)} &= t^{(j)} & j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (192)$$

Les diagrammes de Feynman qui correspondent à ces termes sont donnés sur la figure 6. Un trait plein correspond à un propagateur (ici une matrice  $H$ ) et les cercles correspondent matrices  $t^{(j)}$  des objets.

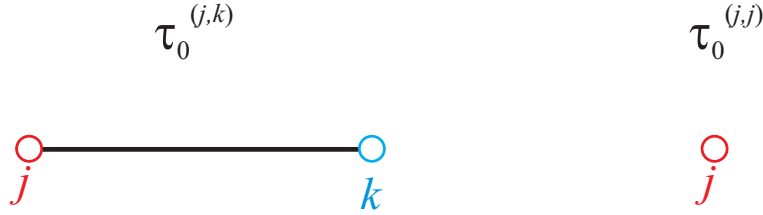


FIG. 6 – Diagrammes de Feynman à l'ordre zéro dans la formulation itérative de  $T_0^{(j,k)}$  et de  $T_0^{(j,j)}$

La première itération des équations (191) donne :

$$\begin{aligned} T_1^{(j,k)} &= t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} T_0^{(l,k)} = t^{(j)} H^{(j,k)} T_0^{(k,k)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N H^{(j,l)} T_0^{(l,k)} \\ &= t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,k)} t^{(k)} & j \neq k & \quad j, k = 1, \dots, N \\ T_1^{(j,j)} &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} T_0^{(l,j)} \\ &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,j)} t^{(j)} & j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (193)$$

Les nouveaux diagrammes de Feynman introduits par cette itération sont présentés sur la figure 7. Dans ces diagrammes, le trait en pointillés entre deux matrices  $t^{(j)}$  signifie qu'il s'agit du même diffuseur.



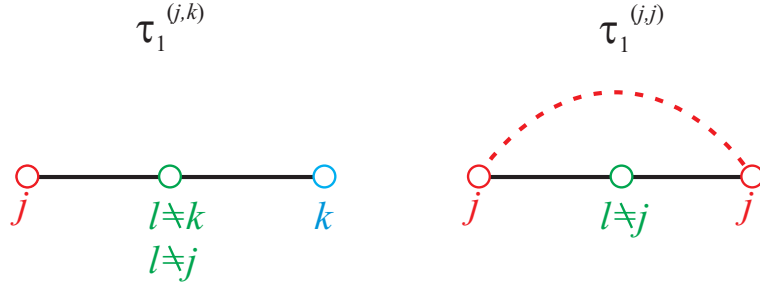


FIG. 7 – Diagrammes de Feynman ajoutés à  $T^{(j,k)}$  et  $T^{(j,j)}$  dans la première itération de  $T_1^{(j,k)}$  et de  $T_1^{(j,j)}$

La deuxième itération donne :

$$\begin{aligned}
 T_2^{(j,k)} &= t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} T_1^{(l,k)} = t^{(j)} H^{(j,k)} T_1^{(k,k)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N H^{(j,l)} T_1^{(l,k)} \\
 &= t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)} + \underbrace{t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)} H^{(k,j)} t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)}}_{a)} + \underbrace{t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)} \sum_{l \neq k, l \neq j}^N H^{(k,l)} t^{(l)} H^{(l,k)} t^{(k)}}_{b)} \\
 &\quad + t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,k)} t^{(k)} + \underbrace{t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N H^{(j,l)} T_1^{(l,k)} t^{(l)} H^{(l,j)} t^{(j)} H^{(j,k)} t^{(k)}}_{c)} \\
 &\quad + \underbrace{t^{(j)} \sum_{l \neq j, l \neq k}^N \sum_{m \neq l, m \neq k, m \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,m)} t^{(m)} H^{(m,k)} t^{(k)}}_{d)} \quad j \neq k \\
 T_2^{(j,j)} &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} T_1^{(l,j)} \\
 &= t^{(j)} + t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,j)} t^{(j)} + \underbrace{t^{(j)} \sum_{l \neq j}^N \sum_{m \neq l, m \neq j}^N H^{(j,l)} t^{(l)} H^{(l,m)} t^{(m)} H^{(m,j)} t^{(j)}}_{e)} \quad (194)
 \end{aligned}$$

et leurs diagrammes de Feynman correspondants introduits par cette itération sont présentés sur la figure 8.

La méthode itérative a l'avantage de permettre de comprendre l'association entre les matrices  $T^{(j,k)}$  et des développements diagrammatiques. On remarque au passage, que ces matrices  $T^{(j,k)}$  permettent une séparation plus naturelle de certaines classes de diagrammes que ce qu'on obtiendrait en développant les matrices  $T^{(j)}$  du genre Foldy Lax. L'analyse «diagrammatique» démontre également pourquoi les algorithmes de calcul des matrices  $T^{(j,k)}$  sont généralement plus fiables que les algorithmes de calcul pour les matrices  $T^{(j)}$ . On voit sur les figures 6 -8 que les propagateurs dans une matrice  $T^{(j,k)}$  se trouvent toujours entre deux matrices- $T$  individuelles (on se rappelle que ces matrices  $t^{(j)}$  sont naturellement tronquées). Les diagrammes qui correspondent aux matrices  $T^{(l)} J^{(l,0)}$  où  $T^{(l)} J^{(l,j)}$  des équations (117) ou (118) par contre ont des propagateurs «libres» (c'est-à-dire. qu'ils ne se terminent pas sur un coté sur des matrices- $T$ ). Puisqu'il n'y a pas de troncature naturelle pour les propagateurs, les algorithmes de calcul des matrices  $T^{(j)}$  sont assez sensibles aux troncatures de l'espace multipolaire.

En exploitant les associations diagrammatiques comme celles des figures 6-8, on peut espérer élaborer de nouvelles techniques pour l'étude de milieux aléatoires.

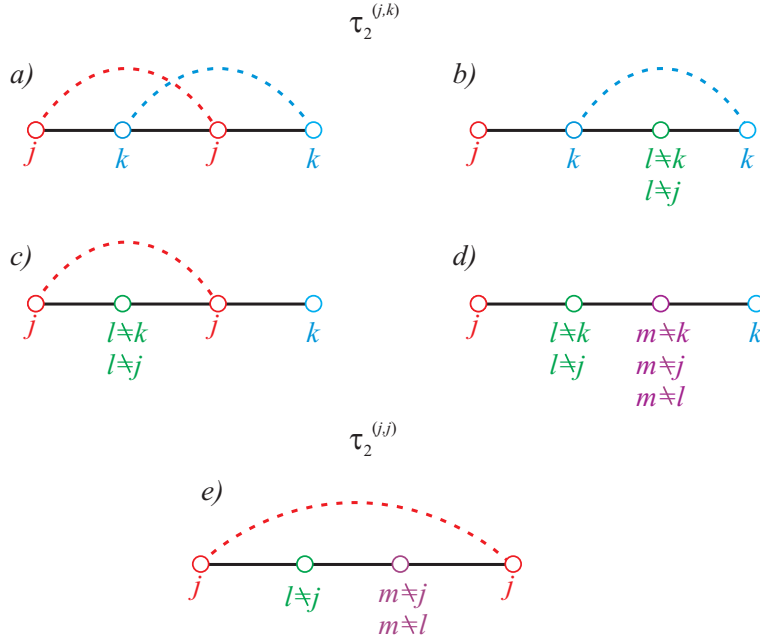


FIG. 8 – Diagrammes de Feynman ajoutés à  $T^{(j,k)}$  et  $T^{(j,j)}$  dans la première itération de  $T_2^{(j,k)}$  et de  $T_2^{(j,j)}$

### 9.3 Matrices de diffusion et sections efficaces

Une fois que nous avons calculé la matrice- $T$  d'un système hétérogène, il nous reste à extraire les quantités d'intérêt physique. Souvent celles-ci peuvent être exprimées en termes de matrices de diffusion ou de sections efficaces. Ces quantités sont les plus utiles quand l'onde incidente sur tout le système est représentable en première approximation par une onde plane. On peut généraliser ces concepts à des champs incidents inhomogènes, mais l'analyse se complique. Nous avons déjà parlé d'une telle situation en section 8.10 pour les forces optiques et dans la Ref.[8]

Pour comparer les résultats numériques avec l'expérience, il est souvent pratique de décrire les états de polarisation par rapport au plan de diffusion (parfois appelé plan d'incidence). Le plan de diffusion est défini comme le plan qui contient la direction du détecteur,  $\hat{\mathbf{r}}$ , et le vecteur d'onde de l'onde incidente,  $\mathbf{k}_i$ . On définit deux vecteurs orthogonaux à  $\mathbf{k}_i$  qui sont respectivement parallèles et perpendiculaires au plan de diffusion  $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel,i}$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{\perp,i}$ , tels que :

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel,i} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\perp,i} = \mathbf{k}_i \quad (195)$$

On peut maintenant exprimer une onde plane incidente sur le système par :

$$\mathbf{E}_i = E \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) (e_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel,i} + e_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp,i}) \quad (196)$$

Les coefficients sans dimension  $e_{\parallel}$  et  $e_{\perp}$  sont des nombres complexes qui déterminent la phase et la polarisation de l'onde. On impose que  $|e_{\parallel}|^2 + |e_{\perp}|^2 = 1$ , afin que  $\|\mathbf{E}_i\|^2 = E^2$ .

De même, on peut définir deux vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$  transverses à  $\hat{\mathbf{r}}$  tels que :

$$\hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{\perp} = \hat{\mathbf{r}} \quad (197)$$

En champ lointain, on peut écrire le champ diffusé  $\mathbf{E}_s$  comme :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}_s(r, \theta, \phi) = \frac{\exp(ikr)}{ikr} [E_{s,\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + E_{s,\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}] \quad (198)$$

La matrice de diffusion dans les coordonnées sphériques s'exprime en terme d'une matrice  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} E_{s,\parallel} \\ E_{s,\perp} \end{pmatrix} = E \frac{\exp(ikr)}{ikr} \begin{pmatrix} S_{\parallel\parallel} & S_{\parallel\perp} \\ S_{\perp\parallel} & S_{\perp\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\parallel} \\ e_{\perp} \end{pmatrix} \quad (199)$$

qui donne les coefficients  $E_{s,\parallel}$  et  $E_{s,\perp}$  en termes de  $e_{\parallel}$  et  $e_{\perp}$ .

Il faut calculer les quatre éléments de la matrice de diffusion,  $S_{\parallel\parallel}(\theta, \phi)$ ,  $S_{\parallel\perp}(\theta, \phi)$ ,  $S_{\perp\parallel}(\theta, \phi)$ , et  $S_{\perp\perp}(\theta, \phi)$  à partir de la matrice- $T$ . Pour ce calcul, il faut faire une rotation de la matrice  $T$  afin que l'axe  $z$  soit confondu avec  $\mathbf{k}_i$ . L'angle  $\phi$  est défini par rapport à l'axe  $x$  du système dans lequel est calculée la matrice- $T$ . On peut calculer analytiquement les coefficients sur la base multipolaire (voir l'éq.(44)). Pour une polarisation parallèle au plan de diffusion les coefficients sont :

$$\begin{aligned} a_{\parallel,h,\nu\mu} &= i^{\nu+1} \sqrt{\pi(2\nu+1)} [\delta_{\mu,1} e^{-i\phi} + \delta_{\mu,-1} e^{i\phi}] \\ a_{\parallel,e,\nu\mu} &= i^{\nu+1} \sqrt{\pi(2\nu+1)} [\delta_{\mu,1} e^{-i\phi} - \delta_{\mu,-1} e^{i\phi}] \end{aligned} \quad (200)$$

Pour une polarisation perpendiculaire au champ incident les coefficients sont :

$$\begin{aligned} a_{\perp,h,\nu\mu} &= i^{\nu} \sqrt{\pi(2\nu+1)} [\delta_{\mu,1} e^{-i\phi} - \delta_{\mu,-1} e^{i\phi}] \\ a_{\perp,e,\nu\mu} &= i^{\nu} \sqrt{\pi(2\nu+1)} [\delta_{\mu,1} e^{-i\phi} + \delta_{\mu,-1} e^{i\phi}] \end{aligned} \quad (201)$$

On peut maintenant écrire les coefficients de l'onde diffusée par chaque objet dans un agrégat en utilisant les matrices  $T$ ,  $\tau^{(j,k)}$  :

$$f_{\parallel,\perp}^{(j)} = \sum_k \exp(ik\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{x}_k) T^{(j,k)} a_{\parallel,\perp} \quad (202)$$

On obtient ensuite les matrices  $S$  en termes des coefficients de diffusion  $f^{(j)}[2]$  :

$$\begin{aligned} S_{\parallel\parallel} &= \sum_{j=1}^N \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}_j) \sum_{n,m} e^{im\phi} i^{-n+1} [\bar{u}_n^m(\cos\theta) f_{\parallel,h,nm}^{(j)} + \bar{s}_n^m(\cos\theta) f_{\parallel,e,nm}^{(j)}] \\ S_{\parallel\perp} &= \sum_{j=1}^N \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}_j) \sum_{n,m} e^{im\phi} i^{-n+1} [\bar{u}_n^m(\cos\theta) f_{\perp,h,nm}^{(j)} + \bar{s}_n^m(\cos\theta) f_{\perp,e,nm}^{(j)}] \\ S_{\perp\perp} &= - \sum_{j=1}^N \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}_j) \sum_{n,m} e^{im\phi} i^{-n} [\bar{s}_n^m(\cos\theta) f_{\perp,h,nm}^{(j)} + \bar{u}_n^m(\cos\theta) f_{\perp,e,nm}^{(j)}] \\ S_{\perp\parallel} &= - \sum_{j=1}^N \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x}_j) \sum_{n,m} e^{im\phi} i^{-n} [\bar{s}_n^m(\cos\theta) f_{\parallel,h,nm}^{(j)} + \bar{u}_n^m(\cos\theta) f_{\parallel,e,nm}^{(j)}] \end{aligned} \quad (203)$$

On peut utiliser cette matrice  $S$  afin de prédire le champ diffusé par un agrégat de diffuseurs. Nous avons tout récemment trouvé un très bon accord entre les résultats prédits par cette technique et des mesures sur la diffusion effectuées dans le domaine micro-onde dans une chambre anéchoïque.[2] Nous venons d'obtenir un contrat de recherche ANR afin d'étudier l'absorption dans des agrégats de géométrie aléatoire du type «suie».

Les sections efficaces totales sont d'autres quantités d'intérêt physique, surtout quand nous sommes moins concernés par la polarisation du champ. Les sections efficaces sont définies en termes de vecteur de Poynting qui décrit le flux d'énergie électromagnétique. La section efficace différentielle est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}}(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i)}{d\Omega} &\equiv \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{S}_{\text{scat}}^{\text{syst}}(\mathbf{r})}{\|\mathbf{S}_{\text{inc}}\|} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \frac{\left\| \sum_j^N \mathbf{E}_s^{(j)}(\mathbf{r}) \right\|^2}{\|\mathbf{E}_{\text{inc}}\|^2} \end{aligned} \quad (204)$$

où  $\mathbf{S}_{\text{scat}}^{\text{syst}}$  est le vecteur de Poynting du champ diffusé par tous les  $N$  objets du système :

$$\mathbf{S}_{\text{scat}}^{\text{syst}} \equiv \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \sum_{j,l}^N \mathbf{E}_s^{(j)} \wedge \mathbf{H}_s^{(l)*} \right\} \quad (205)$$

Puisque la section efficace différentielle est déterminée par le module du champ diffusé, on peut l'évaluer à partir de la matrice de diffusion de l'équation (199). La section efficace totale de diffusion

est en principe simplement obtenue par intégration sur tous les angles solides de la section efficace différentielle. Néanmoins, l'expression souvent assez compliquée de  $d\sigma_{\text{scat}}/d\Omega$  peut rendre cette intégration assez fastidieuse. Il est plus efficace d'exploiter la présence d'harmoniques sphériques vectorielles afin d'intégrer numériquement  $d\sigma_{\text{scat}}/d\Omega$  afin d'obtenir une formule analytique pour  $\sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}}$  directement en termes des coefficients de diffusion  $f^{(j)}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}}(\theta_i, \phi_i) &\equiv \int \frac{d\sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}}(\theta, \phi, \theta_i, \phi_i)}{d\Omega} d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{j,l}^N \text{Re} \left\{ f^{(j)\dagger} J^{(j,l)} f^{(l)} \right\}.\end{aligned}\quad (206)$$

Pour d'autres types de sections efficaces comme la section efficace d'extinction, la forme différentielle n'a pas une signification physique particulière et il n'y a que la section efficace totale qui nous intéresse. La section efficace d'extinction s'écrit :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ext}}^{\text{syst}}(\theta_i, \phi_i) &\equiv \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{\|\mathbf{S}_{\text{inc}}\|} \int \hat{\mathbf{r}} \cdot \sum_j \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_s^{(j)*} + \mathbf{E}_s^{(j)} \wedge \mathbf{H}_i^* \right\} d\Omega \\ &= -\frac{1}{k^2} \sum_j \text{Re} \left\{ a^\dagger f^{(j)} \right\}\end{aligned}\quad (207)$$

Il est également possible de définir des sections efficaces d'absorption individuelles,  $\sigma_{\text{abs}}^{(j)}$ , pour chacun des objets  $j$  dans le système. Si le milieu externe est transparent, on obtient la formule :

$$\sigma_{\text{abs}}^{(j)} = -\frac{1}{k^2} \text{Re} \left\{ \left[ f^{(j)} \right]^\dagger \left[ \mathbb{I} + \left[ t^{(j)} \right]^{-1} \right] f^{(j)} \right\} \quad (208)$$

et l'absorption totale est simplement la somme de toutes les sections efficaces individuelles :

$$\sigma_{\text{abs}}^{\text{syst}} = \sum_{j=1}^N \sigma_{\text{abs}}^{(j)} \quad (209)$$

Dans le cas d'un milieu extérieur transparent, la conservation de l'énergie donne une formule alternative pour l'absorption totale :

$$\sigma_{\text{abs}}^{\text{syst}} = \sigma_{\text{ext}}^{\text{syst}} - \sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}} \quad (210)$$

ce qui nous donne un moyen de vérifier les calculs. Dans le projet ANR «suie», nous utiliserons ces formules afin d'étudier l'absorption dans des agrégats aléatoires.

Pour un système de géométrie aléatoire, des moyennes sur toutes les orientations du système ont souvent plus d'intérêt que les sections efficaces dans une orientation donnée. De nouveau, de telles moyennes peuvent en principe être effectuées de façon numérique, mais sont largement facilitées par des formules analytiques.

La moyenne sur les orientations de la section efficace d'extinction est donnée par exemple par la formule[16] :

$$\langle \sigma_{\text{ext}}^{\text{syst}} \rangle_o = -\frac{2\pi}{k^2} \sum_{j,k=1}^N \text{Re} \left[ \text{Tr} \left\{ T_N^{(j,k)} J^{(k,j)} \right\} \right] \quad (211)$$

alors que la moyenne sur les orientations de la section efficace de diffusion est donnée par la formule[16] :

$$\langle \sigma_{\text{scat}}^{\text{syst}} \rangle_o = \frac{2\pi}{k^2} \text{Re} \left\{ \sum_{j,k,i,l}^N \text{Tr} \left\{ \left[ T_N^{(j,l)} \right]^\dagger J^{(j,k)} T_N^{(k,i)} J^{(i,l)} \right\} \right\} \quad (212)$$

## 9.4 Forces optiques

On se rappelle que la force optique utilisant la forme de Minkowski du tenseur de Maxwell s'écrit :

$$\mathbf{F}_o \equiv \frac{I(0)}{v_b} \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{x}) \equiv \varphi \frac{P_1}{v_b} \mathbf{Q}_f(\mathbf{x}) \quad (213)$$

où  $I(\mathbf{0})$  est l'irradiance du faisceau à l'origine,  $P_i$  la puissance du faisceau, et  $\sigma_f(\mathbf{x})$  dépend de la position  $\mathbf{x}$  de la particule.[8]

On veut calculer la force sur une particule  $j$  du système. Afin de travailler sur un scalaire, on calcule la projection de cette force selon une direction  $\hat{\mathbf{c}}$  où l'orientation de  $\hat{\mathbf{c}}$  est spécifiée par des angles  $\theta$ , et  $\phi$  :

$$\mathbf{F}_o^{(j)} \cdot \hat{\mathbf{c}} \equiv \frac{I(\mathbf{0})}{v_b} \sigma_f^{(j)}(\theta, \phi, \mathbf{x}) \quad (214)$$

Comme nous avons vu en section 8.10.3, on peut décomposer  $\sigma_f$  en deux termes :

$$\sigma_f^{(j)} = \sigma_r^{(j)} - \sigma_a^{(j)} \quad (215)$$

L'expression pour  $\sigma_a^{(j)}$  est :

$$\begin{aligned} \sigma_a^{(j)}(\theta, \phi, \mathbf{x}) &\equiv \hat{\mathbf{c}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_a = \frac{1}{2I(\mathbf{0})} \left( \frac{\varepsilon_e \epsilon_0}{\mu_e \mu_0} \right)^{1/2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_{\Omega} \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \mathbf{E}_s^{(j),*} \cdot \mathbf{E}_s^{(j)} d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} f^{(j),\dagger}(\mathbf{x}) \Lambda(\theta, \phi) f^{(j)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (216)$$

où la matrice analytique  $\Lambda(\theta, \phi)$  est obtenue en décomposant le champ en ondes multipolaires et en effectuant une intégration sur l'angle solide. La matrice  $\Lambda(\theta, \phi)$  s'écrit :

$$\Lambda(\theta, \phi) \equiv D(\phi, \theta, 0) \Upsilon D^\dagger(\phi, \theta, 0) \quad (217)$$

où  $D(\phi, \theta, 0)$  est la matrice de rotation et  $\Upsilon$  une matrice qui s'écrit :

$$\Upsilon \equiv \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ \Theta & \Xi \end{bmatrix} \quad (218)$$

où les blocs  $\Theta_{nm,\nu\mu}$  et  $\Xi_{nm,\nu\mu}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Theta_{nm,\nu\mu} &= \frac{m}{n(n+1)} \delta_{m,\mu} \delta_{n,\nu} \\ \Xi_{nm,\nu\mu} &= \delta_{m,\mu} \frac{i}{\sqrt{(2n+1)(2\nu+1)}} \left( \frac{\delta_{\nu,n-1}}{n} \sqrt{(n^2-1)(n^2-m^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_{\nu,n+1}}{\nu} \sqrt{(\nu^2-1)(\nu^2-m^2)} \right) \end{aligned} \quad (219)$$

La matrice de rotation  $D(\alpha, \beta, \gamma)$  s'écrit :

$$D(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma) \end{bmatrix} \quad (220)$$

et les éléments du bloc  $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)$  sont donnés par :

$$[\mathcal{D}(\alpha, \beta, \gamma)]_{\nu\mu, nm} = \delta_{n,\nu} \exp(i\mu\alpha) d_{\mu m}^{(n)}(\beta) \exp(im\gamma) \quad (221)$$

Les éléments  $d_{\mu m}^{(n)}$  sont standard[32].

Effectuant un calcul analogue pour  $\sigma_r$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(j)}(\theta, \phi, \mathbf{x}) &\equiv \hat{\mathbf{c}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_r = -\frac{1}{2I(\mathbf{0})} \left( \frac{\varepsilon_b \epsilon_0}{\mu_b \mu_0} \right)^{1/2} \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \int_{\Omega} \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{exc}}^* \cdot \mathbf{E}_s \} d\Omega \\ &= -\frac{1}{k^2} \operatorname{Re} \left\{ f^{(j),\dagger}(\mathbf{x}) \Lambda(\theta, \phi) [t^{(j)}]^{-1} f^{(j)}(\mathbf{x}) \right\} \end{aligned} \quad (222)$$

Nous avons utilisé ces formules pour calculer le piégeage d'une particule dans des pincettes optiques[8], ainsi que les forces optiquement induites entre particules ou «binding»[5].

### 9.5 Matrices- $T$ des objets sans symétrie sphérique

De façon analogue à la décomposition du champ sur une base multipolaire (voir les éqs.(47)-(49)), nous pouvons mettre les fonctions d'un développement général d'un champ sur les harmoniques sphériques (voir l'équation (54)) dans une matrice colonne :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \overline{E_{Y,p}} \\ \vdots \\ \overline{E_{X,p}} \\ \vdots \\ \overline{E_{Z,p}} \\ \vdots \end{array} \right\} (n_{\max} + 1)^2 \quad (223)$$

La dimension de cette matrice est déterminée par la troncature de l'espace multipolaire où  $n_{\max}$  est le plus grand nombre quantique multipolaire. Décomposant de la même manière le champ  $\mathbf{D}$ , la relation  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$  dans un milieu hétérogène devient :

$$[\mathbf{D}] = \epsilon_0 Q_\epsilon [\mathbf{E}] \quad (224)$$

où  $Q_\epsilon$  est une matrice composée de 9 blocs, chacune de dimension  $(n_{\max} + 1)^2$  :

$$Q_\epsilon = \begin{pmatrix} Q_{\epsilon YY} & Q_{\epsilon YX} & Q_{\epsilon YZ} \\ Q_{\epsilon XY} & Q_{\epsilon XX} & Q_{\epsilon XZ} \\ Q_{\epsilon ZY} & Q_{\epsilon ZX} & Q_{\epsilon ZZ} \end{pmatrix} \quad (225)$$

La matrice  $Q_\epsilon$  dépend de la distance  $r$  et doit être construite d'une manière très spécifique afin d'éviter des instabilités numériques induites par la troncature de l'espace multipolaire. Ce procédé est tiré des progrès récents sur la théorie des réseaux et est expliqué en détail dans la référence [7].

La relation 224 et les équations de Maxwell sur les harmoniques sphériques vectorielles des équations (55) et (56) forment un système d'équations complètes pour déterminer le champ. On peut manipuler ces équations afin d'obtenir une seule équation différentielle ordinaire par rapport à la variable  $r$  :

$$\frac{d[F]}{dr} = M(r) [F] \quad (226)$$

La matrice colonne  $[F]$  est constituée de fonctions multipliant les harmoniques vectorielles  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Z}$  des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  dans des développements du type (54) :

$$[F(r)] = \begin{bmatrix} [E_X] \\ [E_Z] \\ [\tilde{H}_X] \\ [\tilde{H}_Z] \end{bmatrix} \quad (227)$$

où le champ  $\tilde{\mathbf{H}} \equiv Z_0 \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H}$  a la même dimension que le champ  $\mathbf{E}$ . La matrice  $M$  est composée de

4 × 4 blocs qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -\frac{\mathbb{I}}{r} \quad , \quad M_{12} = M_{13} = 0 \quad , \quad M_{14} = i\mu\frac{\omega}{c}\mathbb{I} \\
M_{21} &= -\frac{a}{r}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YX} \quad , \quad M_{22} = -\frac{\mathbb{I}}{r} - \frac{a}{r}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YZ} \\
M_{23} &= i\frac{\omega}{c}\left(\left(\frac{c}{r\omega}\right)^2 aQ_{\varepsilon YY}^{-1}a - \mu\mathbb{I}\right) \quad , \quad M_{24} = 0 \\
M_{31} &= i\frac{\omega}{c}(Q_{\varepsilon ZY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YX} - Q_{\varepsilon ZX}) \quad , \quad M_{32} = i\frac{\omega}{c}(Q_{\varepsilon ZY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YZ} - Q_{\varepsilon ZZ}) \\
M_{33} &= \frac{1}{r}(Q_{\varepsilon ZY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}a - \mathbb{I}) \quad , \quad M_{34} = 0 \\
M_{41} &= i\frac{\omega}{c}\left(Q_{\varepsilon XX} - Q_{\varepsilon XY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YX} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{ac}{\omega r}\right)^2\right) \quad , \quad M_{42} = i\frac{\omega}{c}(Q_{\varepsilon XZ} - Q_{\varepsilon XY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}Q_{\varepsilon YZ}) \\
M_{43} &= -Q_{\varepsilon XY}Q_{\varepsilon YY}^{-1}\frac{a}{r} \quad , \quad M_{44} = -\frac{\mathbb{I}}{r}
\end{aligned} \tag{228}$$

où  $\mathbb{I}$  est la matrice unité et « $a$ » est une matrice diagonale d'éléments  $a_p\delta_{p,q}$  avec  $a_p = \sqrt{n(n+1)}$ .

On peut donc en principe construire une matrice- $T$  d'un objet en intégrant l'équation différentielle de l'éq.(226) avec une méthode de tir. Le départ de la méthode de tir est la sphère inscrite isotrope (voir figure 4 : section 8.6), et l'on arrête l'intégration numérique à la sphère circonscrite. Si la région hétérogène entre ces deux sphères est suffisamment profonde, il faut compléter cette intégration par une technique de propagation de matrice- $S$  afin d'éviter des instabilités numériques qui s'installent lors d'une intégration sur une grande longueur.

Par la suite, nous avons généralisé cette technique à des objets composés de matériaux anisotropes.[3, 4] Dans de tels matériaux, il faut commencer la méthode de tir à partir d'une sphère inscrite anisotrope. Nous avons constaté qu'une formulation d'une matrice- $T$  d'une sphère anisotrope n'existait pas auparavant. Nous avons donc formulé une solution semi-analytique d'une matrice- $T$  d'une sphère caractérisée par une anisotropie générale.[4] Nous avons commencé tout récemment à explorer les applications numériques de cette technique[1].

## 10 Orientation future des travaux

Actuellement, je continue des études sur les forces optiquement induites dans des systèmes composés de plusieurs diffuseurs. Dans le cadre d'un projet ANR concernant des agrégats de particules absorbantes du type «suie», je prépare des études sur l'absorption dans des grands agrégats ayant des géométries aléatoires. Les premières études vont traiter des agrégats de sphères, mais je prépare aussi la programmation sur des agrégats composés d'objets de forme non-sphérique.

En employant la théorie de type Mie sur les ordinateurs modernes, on peut traiter des sphères isolées homogènes de très grandes tailles par rapport à la longueur d'onde. Des raffinements concernant la théorie de Mie permettent de traiter également des sphères ayant des inhomogénéités radiales jusqu'à de très grandes tailles. Pourtant, à l'heure actuelle, il y a des limitations plutôt sévères sur les tailles et non-sphéricités qu'on peut traiter quand il s'agit d'objets de forme non-sphérique ou d'objets composés de matériaux anisotropes. Je compte porter un regard particulier sur les possibilités d'étendre les domaines de calcul aux objets et agrégats de grande taille.

Dans l'avenir, j'aimerais aussi explorer sur le plan théorique et numérique les possibilités de combiner les techniques de calcul analytique utilisant les ondes multipolaires avec les techniques diagrammatiques venant du formalisme de fonctions de Green. Un des objectifs de ces investigations serait d'améliorer la modélisation des milieux aléatoires étendus, du type peintures et revêtements. Un autre axe d'intérêt serait l'étude des effets des défauts dans des milieux ordonnés du genre cristaux photoniques. En particulier les structures de type opale semblent présenter un intérêt particulier. L'utilisation des fonctions de Green permet également de faire des études sur la densité d'états locaux dans ces structures compliquées.

## 11 Résumés d'études

### 11.1 Interactions effectives

[27, 31]

Dans mes premiers travaux, il s'agissait fréquemment de calculer les transitions, souvent exotiques, entre divers états d'excitation nucléaires et les états fondamentaux. Les noyaux nucléaires contiennent en général un grand nombre de composants nucléoniques (protons, neutrons ou autres). Souvent, les transitions concernent surtout les nucléons dans les couches «externes» des noyaux. On essayait donc de calculer les transitions dans un espace «tronqué» ou «effectif» qui ne contienne que les nucléons externes qui participent à la transition. Néanmoins, puisque les nucléons sont en interaction forte avec les autres composants du noyau, de tels calculs ne sont possibles que si l'on détermine des interactions effectives entre les nucléons des couches externes qui tiennent compte des interactions résiduelles avec les autres composants du noyau. Il fallait également déterminer une matrice  $G$  qui estime les effets dus aux états hautement énergétiques des noyaux qui ne sont pas contenus dans l'espace modèle.

Dans ce contexte, j'ai développé des logiciels pour les calculs suivants :

- Calcul des éléments de la matrice  $G$  de Brueckner sur une base d'oscillateurs harmoniques pour les potentiels de Paris, Bonn et de Reid. Ce logiciel est capable de calculer la matrice  $G$  pour un noyau de masse arbitraire (l'approximation courante dite de «angle average» n'a pas été employée).
- Calcul d'interactions effectives pour une région de masse quelconque (en utilisant les résultats de la matrice  $G$  décrits ci-dessus). Nous avons publié une communication rapide qui montre une amélioration des résultats pour le potentiel dit de Bonn-A dans la couche s-d.[31]

Nous avons également effectué des calculs fournissant les résultats dans la couche f-p et dans la région du plomb.[1\*\*]

### 11.2 Opérateurs effectifs

[29]

Afin de calculer les amplitudes de transition entre différents états nucléaires, nous avons développé un formalisme qui permet la construction de ce qui est essentiellement une «formule de réduction» pour le problème à  $N$ -corps non-relativiste. Bien que les techniques de diagramme de Feynman aient été utilisées depuis longtemps dans la théorie à  $N$ -corps, ce travail définit rigoureusement la connexion entre le modèle des couches, les interactions effectives et les opérateurs effectifs.

### 11.3 Calcul du paramètre de densité des niveaux des noyaux chauds

[28]

Nous avons utilisé des interactions nucléon-nucléon réalistes ( Paris et Bonn ) pour calculer la dépendance en fonction de la température du paramètre de densité de niveaux,  $a_{\text{eff}} = [E(T) - E(0)]/T^2$ . On sait que  $a_{\text{eff}}$  décroît dans les collisions d'ions lourds de  $\approx A/8$  à  $\approx A/13$  quand la température croît de 2 à 5 Mev. Nos résultats sont qualitativement satisfaisants. Cependant, l'énergie d'excitation est plus élevée que la valeur attendue ; ce résultat mériterait une étude plus détaillée.

### 11.4 Capture d'électrons et décroissance dans les étoiles présupernovae

[30]

En collaboration avec M. Aufderheide, G.E. Brown, P. Vogel, nous avons étudié le rôle des interactions faibles (capture d'électrons et décroissances bêta) dans l'évolution des étoiles en fin de vie. Pour les coeurs riches en neutrons ( $Y_e = Z/A$  compris entre 0.42 et 0.43), nous montrons que les noyaux avec  $A > 60$ , négligés jusqu'à présent dans les calculs de l'évolution stellaire, peuvent contribuer de façon significative au taux de capture d'électrons et au taux de décroissance bêta dans les dernières étapes de l'évolution stellaire.



### 11.5 Décroissance double bêta :

[26, 29],[2\*\*]

Nous avons calculé la réduction du taux de décroissance double bêta, avec et sans neutrinos, pour les noyaux  $^{76}\text{Ge}$ ,  $^{82}\text{Se}$  et  $^{100}\text{Mo}$ . Pour cela, nous avons utilisé les interactions effectives obtenues par les potentiels nucléon-nucléon dits de Paris et de Bonn. Contrairement à d'autres auteurs, qui, pour des raisons de simplification, avaient supprimé les corrections de self-énergie dans le calcul du spectre d'énergie de 1-particule, nous avons inclus ces corrections. Ainsi, nous avons pu éviter le problème souvent rencontré de l'instabilité de QRPA (quasi-particle random phase approximation) au voisinage de  $g_{pp} = 1$ . La correspondance entre nos résultats (obtenus sans paramètre phénoménologique) et l'expérience est encourageante.

### 11.6 Brisure spontanée de symétrie

[25]

Pour mieux comprendre l'application des techniques du potentiel effectif dans les théories quantiques des champs comme la théorie  $\phi^4$ , le modèle de Gross-Neveu, et le modèle de Nambu Jona-Lassinio, nous avons démontré que les techniques non-perturbatives du potentiel effectif donnent une solution exacte d'un modèle résolvable dans la limite  $1/N \rightarrow 0$ . Les résultats du modèle, dans le cas où  $N$  serait fini, nous permettent de faire des observations intéressantes sur l'effet tunnel entre dégénérescences de Goldstone. Notre traitement est aussi intéressant du point de vue des calculs de problèmes à  $N$ -corps. En effet, il évite l'apparition de l'instabilité RPA, «Random Phase Approximation», pour des interactions fortes; il montre tout au moins que «l'instabilité» RPA est la signature d'une transition de phase dans la limite  $N \rightarrow \infty$ .

### 11.7 Propagation des ondes et dispersion spatiale dans un milieu hétérogène

[24]

Ici, nous résolvons en priorité la dispersion spatiale d'une onde dans un milieu hétérogène. Après nous être intéressé à tous les domaines de fréquence, nous avons acquis des résultats intéressants quand la longueur d'onde se rapproche de la taille des micro-hétérogénéités. Physiquement, l'onde entre alors en résonance avec des diffuseurs. Nous utilisons une approximation quasi cristalline appliquée à la diffusion multiple. Dans les calculs, nous utilisons un modèle «ponctuel» de la matrice  $T$  complète des diffuseurs. Nous trouvons que la dispersion spatiale a pour conséquence de remplacer le seul mode de propagation d'un milieu homogène par une multitude de modes dans un milieu micro-hétérogène. A condition que la concentration des diffuseurs ne soit pas trop élevée, un seul mode peut se propager; les autres modes ont des indices effectifs complexes, donc ils s'amortissent rapidement dans le milieu. Pour des fréquences voisines de la résonance, les parties imaginaires de ces indices diminuent de façon notable. Il existe alors une possibilité d'existence de nouveaux modes de propagation.

### 11.8 Approximation en champ moyen pour la construction de matrices- $T$ complètes de sphères de taille finie et de diffuseurs flous

[23]

Notre but est d'insérer des modèles de matrices  $T$  complètes dans des formalismes de diffusion multiple. Dans cette optique, nous introduisons une méthode de construction de matrices  $T$  complètes extrêmement simplifiées, mais vérifiant la conservation d'énergie et le principe de causalité. Cette méthode fait approximation en remplaçant les champs à l'intérieur d'un diffuseur individuel par un champ moyen. De ce fait, elle permet une évaluation facile de la diffusion par des diffuseurs sphériques, irréguliers, et même flous (par exemple des agrégats fractals). Dans la limite quasi-statique de diffuseurs sphériques, nous retrouvons la limite «ponctuelle» introduite par «M. Nieuwenhuizen et co-auteurs» en 1992<sup>[\*]</sup>. Contrairement au modèle ponctuel, nos modèles contiennent une dépendance en fonction du vecteur d'onde et donc font intervenir la dispersion spatiale. Cette propriété les rend légèrement plus compliqués que le modèle ponctuel mais, de ce fait, plus riches. En particulier, nos modèles satisfont la relation de Kramers-Krönig de causalité, contrairement au modèle ponctuel qui la viole. Actuellement, nous appliquons ce modèle à des théories de diffusion multiple. Dans les formalismes où nous l'avons employé jusqu'ici, nous trou-

vons un comportement physique bien supérieur à celui du modèle ponctuel et les instabilités de solution rencontrées dans le modèle ponctuel n'apparaissent pas.

[\*] M.Nieuwenhuizen A. Lagendijk and B. van Tiggelen, Phys.Lett. A 169,191(1992).

### 11.9 Matrice- $T$ électromagnétique et propriétés dynamiques effectives d'un milieu aléatoire

[22, 23]

Il s'agit ici d'étudier la réponse des paramètres constitutifs effectifs ( permittivité et perméabilité magnétique) d'un matériau composite dans le domaine dynamique, c'est à dire pour tous les domaines de fréquence. Nous apportons des précisions et des réévaluations sur la notion de paramètre effectif. De nouvelles définitions sont proposées pour ces derniers. Nous appliquons ces formules de définition en effectuant une approximation dite approximation de potentiel cohérent (CPA), et nous résolvons les équations de dispersion afin d'extraire les observables physiques.

Afin de disposer de résultats exacts, nous calculons pour la première fois la matrice- $T$  complète pour une sphère ayant à la fois une permittivité et une perméabilité magnétique qui diffèrent de celles du milieu ambiant. Nous trouvons que la condition d'unitarité, devant être vérifiée par toute matrice- $T$  d'un système sans pertes, restreint sévèrement les formes que peuvent prendre les matrices  $T$ .

### 11.10 Facteurs de phase des ondes incidentes et sortantes dans la diffusion par des agrégats

[19, 21]

Nous étudions en détail les facteurs de phase associés aux ondes entrantes et sortantes lors de la diffusion multiple. Nous montrons que ces facteurs peuvent être traités de la même façon, et nous discutons en détail leur relation avec les matrices de translation-addition. Nous établissons également bon nombre de formules utiles dans les problèmes de diffusion multiple. Nous montrons le rôle important joué par les facteurs de phase dans les quantités contenant des interférences. Dans plusieurs cas, nous avons pu généraliser les résultats publiés. Nous avons également développé de nouvelles relations imposées par la réciprocité dans la diffusion par un agrégat. Nos résultats se simplifient de façon considérable en adoptant une convention où les matrices de translation-addition sont unitaires.

### 11.11 Modélisation de fibres optiques structurées avec un modèle unidimensionnel

[20]

Nous avons développé un modèle unidimensionnel pour le problème des fibres optiques structurées avec guidage dans un cœur d'air enrobé d'un cristal photonique, dites «*holy fibers*» . Le but est d'examiner la possibilité de guidage de faisceaux lasers de haute puissance. Nous utilisons pour cela une méthode numérique rapide et stable, et calculons les caractéristiques des modes de propagation dans de telles fibres. Nous avons mis en évidence la propriété «*mono-mode*» de ces fibres et l'importance du choix des propriétés du cœur afin d'éviter les «*fuites*» de lumière induites par diffraction.

### 11.12 Calculs des champs locaux par des techniques de matrices de transition

[2, 13, 15, 16, 17, 18]

Nous avons développé de nouvelles méthodes de calcul dans le cadre des matrices de transition afin de calculer les champs locaux dans des systèmes tridimensionnels fortement diffusants. Afin de garder toute l'information sur les champs locaux, et d'éviter les problèmes résultants des dimensions des matrices de translation, nous calculons les matrices de transition centrées sur les diffuseurs. Ces techniques ont l'avantage de faciliter des analyses systématiques des champs locaux pour toutes les directions incidentes possibles (des calculs sur les moyennes sur les orientations sont également effectués). De plus, nos méthodes réduisent le temps de calcul en exploitant une approche récursive.

### 11.13 Relations d'auto-consistance des matrices de transition et calculs de champs de diffusion

[16]

Dans cette étude nous avons obtenu des relations d'auto-consistance devant être satisfaites par les matrices de transition d'un système de diffuseurs. De telles relations servent à vérifier la stabilité numérique de notre méthode de calcul des matrices. Nous trouvons que notre méthode est fiable jusqu'à la précision des machines, dans tous les cas que nous avons testés. Dans cet article nous démontrons également l'utilité des matrices de transition dans le calcul des modifications du champ causé par la diffusion dépendante.

### 11.14 Absorption dans des systèmes de diffusion multiple et cohérente

[9, 10, 11, 19]

A l'Institut Fresnel et ailleurs, il est devenu possible de fabriquer de petits diffuseurs recouverts d'une couche d'un deuxième matériau. Si de tels diffuseurs sont distribués dans une matrice en densité suffisante, le milieu va fortement diffuser la lumière. On sait qu'une des conséquences de cette diffusion est de prolonger le chemin parcouru par lumière. En conséquence, un milieu chargé de petits diffuseurs recouverts d'une couche de matériau absorbant peut voir son absorption augmenter d'une façon considérable. Nous traitons de façon exacte la diffusion d'ondes électromagnétique par un système de plusieurs particules absorbantes. Nous sommes donc amenés à tenir compte de la diffusion multiple et cohérente puisque chaque onde «d'excitation» sur un diffuseur contient l'onde incidente sur le système mais aussi les ondes diffusées par chacun des autres diffuseurs. Dans cette étude, nous établissons des formules de calcul rigoureux de la matrice de transition d'un système où les diffuseurs sont des sphères avec plusieurs enrobages (pas nécessairement concentriques). Cette étude nous a amenés à définir une nouvelle quantité, la longueur d'absorption effective,  $l_{\text{abs}}^{\text{eff}}$ , qui permet d'estimer l'absorptivité d'un milieu présentant à la fois de l'absorption et de la diffusion. Le calcul de  $l_{\text{abs}}^{\text{eff}}$  nous a amenés à mettre au point de nouvelles méthodes qui permettent la séparation des effets de diffusion cohérente de ceux de diffusion multiple. Cette technique s'avérera utile dans l'extrapolation des effets macroscopiques à partir des calculs sur les interactions microscopiques.

### 11.15 Calcul des forces optiques dans des faisceaux arbitraires en utilisant le théorème de translation-addition

[5, 8]

On établit des méthodes quasi-analytiques pour le calcul des forces optiques sur des particules micrométriques piégées dans des «pincettes» et pièges optiques. La décomposition du faisceau incident sur une base permet la description d'une grande variété de faisceaux incidents. L'utilité de cette étude se trouve dans le fait que les approximations les plus couramment utilisées dans le calcul des forces optiques ne sont que rarement valables dans la pratique. On démontre notamment que les résonances ont une influence considérable sur les amplitudes des forces optiques et même sur la position d'équilibre dans une pincette optique. Nous discutons aussi l'importance de la forme du faisceau d'une pincette optique afin d'établir le lien entre la forme et la puissance totale du faisceau.

### 11.16 Théorie différentielle de la diffusion de la lumière par un objet tri-dimensionnel

[7]

On développe la théorie différentielle de la diffraction de la lumière par un objet de forme quelconque décrit en coordonnées sphériques. Le champ est développé sur une base d'harmoniques sphériques vectorielles.

On réduit les équations de Maxwell à un système différentiel du premier ordre. On étend la technique dite «Fast Fourier Factorization» à des bases de fonctions vectorielles. On utilise l'algorithme de propagation de la matrice  $S$  afin d'éviter les instabilités numériques autrefois rencontrées dans de la théorie différentielle des réseaux de diffraction.

### 11.17 Théorie différentielle de la diffraction par des objets anisotropes de forme sphérique

[5]

Nous avons établi un développement en harmoniques sphériques vectorielles du champ à l'intérieur d'une sphère homogène composé d'un matériau anisotrope arbitraire. Ce développement nous permet d'étendre à ce problème une analyse du type de la théorie de Mie pour écrire les conditions aux limites à la surface de la sphère. Cette solution permet d'établir la première étape dans la formulation d'une théorie différentielle de diffraction pour un objet anisotrope de forme quelconque. Des applications sont actuellement en cours afin de mieux comprendre la diffusion par des poussières interstellaires anisotropes.[1]

### 11.18 Théorie différentielle de la diffraction par des objets anisotropes de forme arbitraire

[1, 3, 4]

Commencent avec une sphère inscrite à l'intérieur d'un objet anisotrope quelconque, on étend la théorie de la diffraction par un objet isotrope tri-dimensionnel de forme quelconque[7] aux objets anisotropes de forme quelconque. La théorie utilise la technique de «Fast Fourier Factorization» étendue à des bases de fonctions vectorielles et à des bases de fonctions scalaires arbitraires. Elle utilise l'algorithme de propagation de la matrice  $S$  afin d'éviter les instabilités numériques.

### 11.19 Méthode de la matrice $T$ appliquée aux cristaux photoniques tridimensionnels

Généralement, les théories développées pour étudier les cristaux photoniques les supposent parfaitement périodiques et donc de dimensions infinies. Néanmoins, de nombreuses études ont récemment démontré que les effets de bord et les défauts dans les cristaux photoniques sont très importants, en pratique, sur les systèmes réels.

Une solution possible pour traiter des cristaux photoniques de taille finie est d'évaluer la matrice  $T$  pour chaque élément (diffuseur) d'un système et, ensuite, de construire la matrice- $T$  du système tout entier à travers une théorie de diffusion multiple.

Comme beaucoup d'autres méthodes, on peut utiliser la matrice- $T$  du système afin de calculer la carte de champ dans un cristal photonique, mais, plus important encore la formulation par matrice- $T$  se prête à une extraction rapide d'un grand nombre de quantités physiques d'intérêt expérimental comme les sections efficaces et la matrice de (l'amplitude de) diffusion. Cette utilité s'est déjà avérée fructueuse lors de la comparaison avec l'expérience effectuée sur la diffusion par des agrégats (en amplitude et en phase) dans le domaine micro-ondes.[2]

## 12 Publications dans des journaux avec comité de lecture

### Références

- [1] *The T-matrix of the homogeneous anisotropic sphere : applications to orientation averaged resonant scattering*, B.Stout, M. Nevrière, E. Popov, JOSA A **24**, pp. 1120-1130 (2007).
- [2] *Amplitude and phase of light scattered by micro-scale aggregates of dielectric spheres : Comparison between theory and microwave analogy experiments*, P. Sabouroux, B. Stout, J-M. Geffrin, C. Eyraud, I. Ayranci, R. Vaillon, N. Selçuk, "Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer" **103**, pp.156-167 (2007).
- [3] *Mie scattering by an anisotropic object. Part II : Arbitrary-shaped object – differential theory*, B.Stout, M. Nevrière, E. Popov, JOSA A **23**, pp. 1124-1134 (2006).
- [4] *Mie scattering by an anisotropic object. Part I : Homogeneous sphere*, B.Stout, M. Nevrière, E. Popov, JOSA A, **23** , pp. 1111-1123 (2006).
- [5] *Longitudinal optical binding of high optical contrast microdroplets in air*, M.Guillon, Olivier Moine, Brian Stout, Physical Review Letters 96 143902-(1-4) (2006)
- [6] *Scattering efficiency of aggregated clusters of spheres : dependence on configuration and composition*, J.C. Auger, B.Stout, V. Martinez, JOSA A, **22** , pp. 2700-2708 (2005).
- [7] *Light diffraction by a three-dimensional object : differential theory*, B.Stout, M. Nevrière, E. Popov, JOSA A, **22** , pp. 2385-2404, (2005).
- [8] *Optical force calculations in arbitrary beams by use of the vector addition theorem*, Olivier Moine and B.Stout, JOSA B, **22** , pp. 1620-1631, (2005).
- [9] *Optical properties of an eccentrically located pigment within an air bubble*, J.C.Auger, Ruben G. Barrera, B.Stout, Progress in Organic Coatings, **49** , pp. 74-83, (2004).
- [10] *Absorption in Multiple Scattering Systems of Coated Spheres*, B. Stout, C. Andraud, S.Stout, J.Lafait, J. Opt Soc. Am. A, **20**, pp. 1050-1059, (2003).
- [11] *Absorption in Multiple Scattering Systems of Coated Spheres : Design applications*, B. Stout, C. Andraud, S.Stout, J.Lafait, Physica B, **338**, pp.121-125, (2003).
- [12] *Multiple light scattering in multistratified media : model, experiment*, A. da Silva, C. Andraud, E.Charron, B.Stout, J.Lafait, Physica B, **338**, pp. 74-78, (2003).
- [13] *A recursive centered T-Matrix algorithm to solve the multiple scattering equation : numerical validation*, J C Auger, B Stout, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, **79-80**, pp. 533-547, (2003).
- [14] *Scattering efficiencies of aggregates of spherical particles*, J C Auger, R G Barrera, B Stout, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, **79-80**, pp. 521-531 (2003).
- [15] *A Transfer Matrix Approach to Local Field Calculations in Multiple Scattering Problems*, B. Stout, J.C. Auger, Jacques Lafait, Journal of Modern Optics, **49**, pp. 2129-2152, (2002).
- [16] *Complete field descriptions in three-dimensional multiple scattering problems : a transfer-matrix approach*, B Stout, C Andraud, D Prot, J Lafait, J C Auger and S Stout, J. Opt. A : Pure Appl. Opt. **4** S182-S187, (2002).
- [17] *Local electric field enhancements and large third-order optical nonlinearity in nanocomposite materials*, D. Prot, B. Stout, K.Lafait, N.Pinçon, B Palpant and S Debrus, J. Opt. A : Pure Appl. Opt. **4** S99-S102, (2002).
- [18] *Individual and Aggregate Scattering Matrices and Cross Sections : Conservation Laws and Reciprocity*, B.Stout, J.C.Auger, J.Lafait, Journal of Modern Optics, **48**, 2105-2128, (2001).
- [19] *Scattering Properties of Rutile Pigments Located Eccentrically Within Microvoids*, J.C. Auger B. Stout, R.G. Barrera, F.Curiel, Journal of Quant Spect. & Rad. Transfer, **70**, 675-695, (2001).
- [20] *Photonic Crystal Waveguides : A One Dimensional Model Theory*, B.Stout, S.Stout, M.Nevrière, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, **15**, pp. 961-988, (2001).
- [21] *Observations and Calculations of Light Scattering from Clusters of Spheres*, S. Holler, J.C. Auger, B. Stout, Y. Pan, J.R. Bottiger, R.K. Chang, G. Videen, Applied Optics, **39**, pp. 6873-6887, (2000).

- [22] *Dependent light scattering in dense heterogeneous media*, J.C. Auger, B. Stout, Jacques Lafait, Physica B **279**, pp. 21-24, (2000).
- [23] *Momentum Dependent Electromagnetic T-matrix and Dynamic Effective Properties of Random Media*, Y.P. Pellegrini, D.B. Stout and P.Thibaudeau, Physica A, **241**, pp. 72-76, (1997).
- [24] *Off-Shell Mean-Field Electromagnetic T-matrix of Finite Size Spheres and Fuzzy Scatterers*, Y.P. Pellegrini, D.B. Stout and P.Thibaudeau, Journal of Physics : Condensed Matter, **9** (1), pp. 177-191, (1997).
- [25] *Spontaneous Symmetry Breaking in a Solvable Model*, D.B. Stout, Nuclear Physics A567 553-575 North Holland, (1994).
- [26] *Two Neutrino Double Beta Decay and Self-Consistent Self-Energies*, D.B.Stout and T.T.S. Kuo, Physical Review Letters, **69** (13), (1992).
- [27] *Bonn Potential and s-d Shell Effective Interaction*, M.F. Jiang and R. Machleidt D.B. Stout and T.T.S. Kuo, Phys. Rev. C46, 910, (1992).
- [28] *Level Density Parameter of Nuclei at Finite Temperature*, D.B. Stout, C. Grégoire, T.T.S. Kuo, Nuclear Physics A530 94-110 North Holland, (1991).
- [29] *Linked Diagram Expansions for the Transition Matrix and the Normalization of Model-Space Wave Functions*, D.B. Stout and T.T.S. Kuo, Nuclear Physics A526 90-108 North Holland, (1991).
- [30] *Electron Capture and  $\beta$ -Decay in Presupernova stars*, M.B. Aufderheide and G.E. Brown, T.T.S. Kuo and D.B. Stout and P. Vogel, The Astrophysical Journal **362** 241, (1990).
- [31] *Strength of Tensor Force and s-d-Shell Effective Interactions*, M.F. Jiang and R. Machleidt D.B. Stout and T.T.S. Kuo, Physical. Review. C Rapid Communications 40 R1857, 1989.

## Autres Publications

- [1\*\*] *Shell Model Interactions from Modern NN Potentials for Nuclei in the Pb Region*, D.B. Stout and T.T.S. Kuo and Dan Strottman, (publication interne, Los Alamos National Laboratory)
- [2\*\*] *Zero Neutrino Double Beta Decay with Self-Consistent Self-Energies*, D.B.Stout (thèse)
- [3\*\*] *Wave Propagation and Spatial Dispersion in Random Media*, Y.P. Pellegrini, D.B. Stout and P.Thibaudeau (Proceedings Journées Maxwell 95, June 6-9, Bordeaux-Lac, CEA-CESTA BP2, F-33114, Le Barp, France (1995)).

## Références générales

- [32] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton New Jersey (1960).
- [33] C. Cohen-Tannoudji, *Photons & Atomes - Introduction à l'électrodynamique quantique*, (InterEdition/ Editions du CNRS 1987).
- [34] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley & Sons 1965).
- [35] Leung Tsang, Jin Au Kong, Robert T. Shin, "Theory of Microwave Remote Sensing, Wiley Series in Remote Sensing", John Wiley & Sons, (1985).
- [36] Weng Cho Chew, *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* ; IEEE Press Series on Electromagnetic Waves, IEE Press, New York (1994).
- [37] D. W. Mackowski, *Calculation of the T matrix and the scattering matrix for ensembles of spheres*, J. Opt. Soc. Am. **13**, 2266-2278, (1996).
- [38] Y.C. Tzeng and A.K.Fung, *T-matrix approach to multiple scattering of EM waves from N-spheres*, Journal of Electr. Waves and Appl., **8**, (1994).
- [39] P.R. Siqueira and K. Sarabandi *T-matrix Determination of Effective Permittivity for Three-Dimensional Dense Random Media*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol 48, Febuary 2000.
- [40] C. F. Bohren, D. R. Huffman, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley-Interscience, New-York, 1983).



## 13 Appendices

### A Théorème de translation pour ondes partielles vectorielles

On prend un point  $M$  dans un système de coordonnées sphériques. On considère un second système de coordonnées sphériques centré sur la position  $\mathbf{r}_0$ . La position de  $M$  dans ce deuxième système centré sur  $\mathbf{r}_0$  est :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (\text{A1})$$

Le théorème de translation exprime les ondes multipolaires du système d'origine en termes des ondes multipolaires centrées sur  $\mathbf{r}_0$  :

$$\begin{aligned} \Psi^t(\mathbf{kr}) &= \Psi^t(k\mathbf{r}') J(k\mathbf{r}_0) & r' > r_0 \\ \Psi^t(\mathbf{kr}) &= \mathcal{R}g \{ \Psi^t(k\mathbf{r}') \} H(k\mathbf{r}_0) & r' < r_0 \\ \mathcal{R}g \{ \Psi^t(\mathbf{r}) \} &= \mathcal{R}g \{ \Psi^t(\mathbf{r}') \} J(k\mathbf{r}_0) & \forall |r_0| \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

où la matrice  $J(k\mathbf{r}_0)$  est définie comme la partie régulière de  $H(k\mathbf{r}_0)$ ,  $J(k\mathbf{r}_0) \equiv \mathcal{R}g \{ H(k\mathbf{r}_0) \}$ , et  $H(k\mathbf{r}_0)$  est la matrice de translation irrégulière. De façon explicite,  $H(k\mathbf{r}_0)$  s'exprime :

$$H(k\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} A_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) & B_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \\ B_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) & A_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

On peut exprimer les éléments du bloc  $A$  en suivant le traitement de Tsang and Kong :

$$A_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) = \frac{\gamma_{nm}}{\gamma_{\nu\mu}} (-1)^\mu \sum_{p=|n-\nu|}^{n+\nu} a(m, n|\mu, \nu|p) a(n, \nu, p) h_p(kr_0) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_0) e^{i(m-\mu)\phi_0} \quad (\text{A4})$$

où les coefficients de normalisation sont définies :

$$\gamma_{nm} \equiv \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi n(n+1)(n+m)!}} \quad (\text{A5})$$

Les quantités  $a(m, n|\mu, \nu|p)$  sont les coefficients de Gaunt et sont exprimées en termes des coefficients de Wigner  $3j$  :

$$\begin{aligned} a(m, n|\mu, \nu|p) &= (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[ \frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -(m+\mu) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Le facteur multiplicatif,  $a(n, \nu, p)$ , dans (A4), est défini par :

$$\begin{aligned} a(n, \nu, p) &\equiv \frac{i^{\nu+p-n}}{2\nu(\nu+1)} [2\nu(\nu+1)(2\nu+1) + (\nu+1)(n-\nu+p+1)(n+\nu-p) \\ &\quad - \nu(\nu-n+p+1)(n+\nu+p+2)] \\ &= i^{\nu+p-n} \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} [\nu(\nu+1) + n(n+1) - p(p+1)] \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Les éléments du bloc matrice  $B$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_{\nu\mu,nm}(kr_0, \theta_0, \phi_0) &= \frac{\gamma_{nm}}{\gamma_{\nu\mu}} (-1)^{\mu+1} \sum_{p=|n-\nu|+1}^{n+\nu-1} a(m, n|\mu, \nu|p, p-1) b(n, \nu, p) \\ &\quad h_p(kr_0) P_p^{m-\mu}(\cos \theta_0) e^{i(m-\mu)\phi_0} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

où  $a(m, n|\mu, \nu|p, q)$  est un coefficient très similaire au coefficient de Gaunt :

$$\begin{aligned} a(m, n|\mu, \nu|p, q) &= (-1)^{m+\mu} (2p+1) \left[ \frac{(n+m)!(\nu+\mu)!(p-m-\mu)!}{(n-m)!(\nu-\mu)!(p+m+\mu)!} \right]^{1/2} \\ &\times \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & p \\ m & \mu & -m-\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A9})$$



et où

$$b(n, \nu, p) \equiv -i^{\nu+p-n} \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} [(n+\nu+p+1)(\nu-n+p)(n-\nu+p)(n+\nu-p+1)]^{1/2}.$$